Jak, mając taki zbiór, możemy pokolorować płaszczyznę tak, by każda prosta była co najwyżej trzykolorowa, a każdy okrąg co najwyżej czterokolorowy? Pokolorujmy całą płaszczyznę jednym kolorem. Następnie weźmy taki zbiór punktów $\mathcal{X}$ o nieskończonej liczbie elementów, że żadne trzy punkty, które do niego należą, nie są współliniowe, żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Każdy punkt należący do zbioru $\mathcal{X}$ pokolorujmy innym kolorem. Wtedy każda prosta będzie co najwyżej trzykolorowa, a każdy okrąg co najwyżej czterokolorowy. Rozwinięte zadanie z Olimpiady Matematycznej Juniorów okazało się bardzo ciekawym problemem. Obecnie pracuję nad jego uogólnieniem w trzecim wymiarze.

Kończąc, chciałabym bardzo podziękować opiekunowi mojej pracy, Panu Wojciechowi Guzickiemu za zaproponowanie mi tego tematu oraz pomoc przy tworzeniu pracy.

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

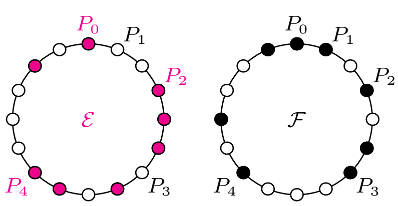
M 1528. Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 należy pomalować na czarno albo na biało. Na ile sposobów można uczynić to tak, aby każdy kwadrat 2×2 zawierał parzystą liczbę czarnych pól?
Rozwiązanie na str. 1

M 1529. Sześcian przecięto płaszczyzną, uzyskując w przekroju pięciokąt opisany na okręgu. Udowodnić, że ten pięciokąt ma oś symetrii.
Rozwiązanie na str. 2

M 1530. Na okręgu o długości 2^n $(n \geqslant 2)$ znajdują się punkty $P_0, P_1, \ldots, P_{2^n-1}$ będące wierzchołkami 2^n-kąta foremnego, oznaczone w taki sposób, że długość łuku $P_{i-1}P_i$, mierzonego zgodnie z ruchem wskazówek zegara, jest równa i dla każdego $i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Niech

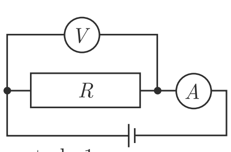
$$\mathcal{E} = \{P_i : 2 \mid i\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{F} = \{P_i : i < 2^{n-1}\}.$$

Udowodnić, że $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ są przystające (jako podzbiory płaszczyzny).

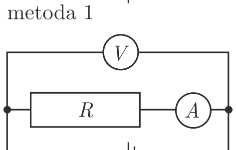


Uwaga. Można udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 2$ istnieje etykietowanie wierzchołków 2^n-kąta foremnego o opisanych własnościach – jest to równoważne zadaniu 2 z I etapu LX OM, którego rozwiązanie można znaleźć na stronie `archom.ptm.org.pl/?q=node/9`. Rysunek przedstawia przypadek $n = 4$ z zaznaczonymi zbiorami $\mathcal{E}$ oraz $\mathcal{F}$.
Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Andrzej MAJHOFER



metoda 1



metoda 2

F 927. Mamy do dyspozycji woltomierz o oporze wewnętrznym R_V i amperomierz o oporze wewnętrznym R_A. W celu wyznaczenia nieznanej wartości oporu R opornika możemy zestawić obwód pomiarowy na dwa różne sposoby (rysunek). Wykonując pomiary metodą 1, odczytaliśmy wartość prądu równą I_1 i napięcie równe U_1, a pomiary metodą 2 dały wyniki I_2 i U_2. W jakich warunkach wartość obliczona na podstawie uproszczonego wzoru $R_1 = U_1/I_1$ jest dokładniejszym przybliżeniem dokładnej wartości R niż wartość $R_2 = U_2/I_2$? Zakładamy, że każdorazowo woltomierz poprawnie pokazuje różnicę potencjałów na jego zaciskach, a amperomierz poprawnie podaje wartość płynącego przezeń prądu.
Rozwiązanie na str. 4

F 928. Oszacuj, o ile zmienia się masa człowieka w ciągu dobrze przespanej nocy (8 godzin snu). Dorosły człowiek w spoczynku wykonuje średnio 12 oddechów na minutę, a w każdym oddechu „wymienia” około 0,5 l powietrza. Skład wdychanego powietrza to (objętościowo) w 78% azot i 21% tlen, a wydychanego powietrza w 78% azot, 17% tlen i 4% dwutlenek węgla.
Rozwiązanie na str. 5