Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2017

Zadania z matematyki nr 741, 742

Redaguje Marcin E. KUCZMA

741. Niech W będzie wielościanem wypukłym, środkowo-symetrycznym, i niech π będzie ustaloną płaszczyzną, przechodzącą przez środek symetrii. Przekrój wielościanu W płaszczyzną π jest zawarty w kole o promieniu r. Udowodnić, że przekrój wielościanu W każdą płaszczyzną, równoległą do π, jest zawarty w pewnym kole o promieniu r – lub podać przykład, pokazujący nieprawdziwość takiego stwierdzenia.

742. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $p = 4k+1$. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia s, mniejsza od p, dla której różnica $sp - \lfloor\sqrt{sp}\rfloor^2$ jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

Zadanie 742 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 727 ($WT = 3{,}22$) i 728 ($WT = 1{,}60$) z numeru 10/2016

Marek Spychała	Warszawa	42,75
Witold Bednarek	Łódź	42,32
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,22
Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Adam Dzedzej	Gdańsk	35,68
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	31,78

Rozwiązania zadań z numeru 1/2017

Przypominamy treść zadań:

733. Wierzchołek czworościanu nazwijmy *ciekawym*, jeśli z trzech wychodzących zeń krawędzi nie da się zbudować trójkąta.
(a) Czy istnieje czworościan, którego wszystkie wierzchołki są ciekawe?
(b) Czy istnieje czworościan, mający dokładnie jeden ciekawy wierzchołek?

734. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $p, q, a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} a_{k+1}^{-q} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^p \qquad \text{(przyjmujemy } a_{n+1} = a_1\text{)}.$$

733. (a) Weźmy dowolny czworościan oraz jego najdłuższą krawędź. Przyjmijmy, że ma ona długość a, zaś dwie przyległe do niej ściany mają krawędzie długości a, b, c oraz a, d, e, przy czym krawędzie a, b, e mają wspólny koniec oraz krawędzie a, c, d mają wspólny koniec. Wówczas $a < b + c$ oraz $a < d + e$; stąd $2a < b + c + d + e$, wobec czego musi zachodzić co najmniej jedna z nierówności $a < b + e$ lub $a < c + d$. Zatem co najmniej jeden z końców krawędzi a nie jest wierzchołkiem ciekawym.

(b) Dokładnie jeden wierzchołek ciekawy jest możliwy. Rozpocznijmy od przykładu czworościanu zdegenerowanego do czwórki punktów na płaszczyźnie w konfiguracji: ABC – trójkąt prostokątny; D – środek przeciwprostokątnej AB; $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = |BD| = c$, przy czym $a < c < b < 2a$ (np. $a = 16$, $b = 30$, $c = 17$). Z punktu A wychodzą krawędzie długości $b, c, 2c$; z punktu C: a, b, c; z punktu D: c, c, c; każda z tych trójek spełnia warunek trójkąta. Pozostaje wierzchołek B – jedyny ciekawy (wspólny koniec krawędzi $a, c, 2c$). Teraz wystarczy wyjść w przestrzeń i nieznacznie przemieścić wierzchołek D, usuwając go prostopadle z płaszczyzny ABC. Wychodzące zeń krawędzie trochę się wydłużą. Przy małym przemieszczeniu rozważane nierówności (ostre) pozostaną w mocy; punkt B nadal będzie jedynym wierzchołkiem ciekawym.

734. W nierówności Bernoulliego $(1+t)^{\alpha+1} \geqslant 1 + (\alpha+1)t$ (słusznej dla $t \geqslant -1$, $\alpha \geqslant 0$) wykonujemy „przesunięcie zmiennej” $1 + t = x$, uzyskując postać

$$x^{\alpha+1} \geqslant (\alpha+1)x - \alpha \qquad (\text{dla } x \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0).$$

Podstawiając $\alpha = q/p$ oraz $x = (a_k/a_{k+1})^p$, dostajemy

$$\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^{p+q} \geqslant \frac{p+q}{p}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^p - \frac{q}{p} \qquad (\text{dla } k = 1, \ldots, n).$$

Mnożymy stronami przez a_{k+1}^p, otrzymując

$$\frac{a_k^{p+q}}{a_{k+1}^q} \geqslant \left(1 + \frac{q}{p}\right)a_k^p - \frac{q}{p}\,a_{k+1}^p.$$

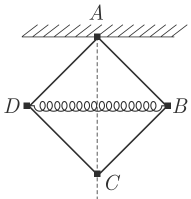
Suma tych nierówności (dla $k = 1, \ldots, n$) to teza zadania.

Zadania z fizyki nr 638, 639

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2017

638. Układ składa się z czterech jednakowych, lekkich prętów o długości l i lekkiej sprężyny o długości $2l$ (rys. 1). Pręty połączone są przegubowo za pomocą małych kulek o jednakowych masach. Układ zamocowany jest w punkcie A i znajduje się w polu ciężkości. W stanie równowagi pręty tworzą kwadrat. Znaleźć częstość małych drgań układu, przy których punkt C porusza się po linii pionowej.



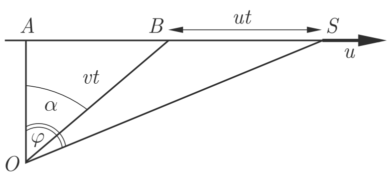
Rys. 1

639. Lis biegnie po linii prostej ze stałą prędkością v_1. Lisa goni pies, którego prędkość ma stałą wartość v_2 i skierowana jest cały czas na lisa. W chwili, gdy prędkości v_1 i v_2 są do siebie prostopadłe, odległość między lisem a psem wynosi l. Jakie jest w tym momencie przyspieszenie psa?

Rozwiązania zadań z numeru 1/2017

Przypominamy treść zadań:

630. Samolot leci z prędkością u po prostej poziomej, przechodzącej nad głową obserwatora. W pewnej chwili obserwator widzi samolot w kierunku, który tworzy z pionem kąt φ. Jaki kąt z pionem tworzy w tej samej chwili kierunek, wzdłuż którego dociera do obserwatora dźwięk silnika samolotu? Prędkość dźwięku wynosi v. Rozważ przypadki $u < v$ oraz $u > v$.



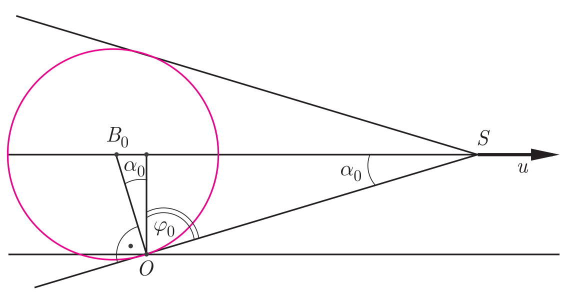
Rys. 2

631. Na powierzchni poziomej znajdują się dwa jednakowe, cienkościenne walce o masie m każdy. Osie walców są równoległe, promienie są równe R. Na początku jeden z walców spoczywa, a drugi toczy się bez poślizgu w kierunku pierwszego z prędkością ruchu postępowego v_0 aż do centralnego, sprężystego zderzenia. Współczynnik tarcia kinetycznego walców o podłoże jest równy μ, tarcie między walcami jest zaniedbywalne. Znaleźć maksymalną odległość między walcami po zderzeniu.

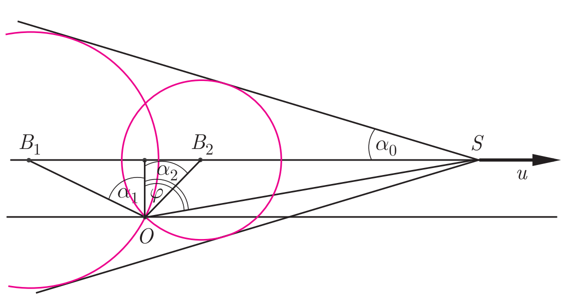
630. Niech obserwator, znajdujący się w punkcie O, widzi samolot w punkcie S i słyszy wysłany przez samolot z punktu B dźwięk, który dotarł do niego po czasie t. Zgodnie z rysunkiem 2

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha + \frac{ut}{vt\cos\alpha}, \tag{1}$$

gdzie α jest szukanym kątem. Wprowadźmy oznaczenie $x := \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha > 0$.



Rys. 3



Rys. 4

Zgodnie z (1) mamy

$$x = \frac{u}{v}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{u}{v}\sqrt{1+(\operatorname{tg}\varphi - x)^2}.$$

Otrzymujemy stąd równanie kwadratowe

$$x^2 + \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{\frac{v^2}{u^2}-1}x - \frac{1}{\cos^2\varphi(\frac{v^2}{u^2}-1)} = 0. \tag{2}$$

Rozwiązania tego równania mają postać

$$x_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1-\frac{v^2}{u^2}} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1-\frac{v^2}{u^2})^2} - \frac{1}{\cos^2\varphi(1-\frac{v^2}{u^2})}}.$$

Gdy prędkość dźwięku jest większa od prędkości samolotu ($v > u$), wyróżnik równania (2) jest dodatni dla każdego φ, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, zatem $x = x_1$. Dla samolotu naddźwiękowego ($u > v$) wyróżnik równania (2) jest dodatni, gdy $\cos\varphi < \frac{v}{u}$ – równanie (2) ma wtedy dwa pierwiastki dodatnie. Każdy punkt trajektorii samolotu jest źródłem fali kulistej, obwiednia tych fal tworzy powierzchnię stożkową (rys. 3), która przesuwa się z prędkością samolotu u. Po raz pierwszy obserwator słyszy dźwięk wysłany przez samolot z punktu B_0, gdy $\sin\alpha_0 = \cos\varphi_0 = \frac{v}{u}$. W następnych chwilach do obserwatora docierają czoła dwóch fal kulistych (rys. 4) i wydaje mu się, że z punktu B_0 poruszają się w przeciwne strony dwa źródła dźwięku.

631. Ponieważ tarcie między walcami jest zaniedbywalne, prędkość kątowa ruchu obrotowego pierwszego walca $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$ nie zmienia się w wyniku zderzenia. Z zasad zachowania pędu i energii (zderzenie sprężyste) wynika, że po zderzeniu prędkość ruchu postępowego pierwszego walca wynosi zero, a drugiego v_0. Po zderzeniu na pierwszy walec działa siła tarcia skierowana do przodu. Jego prędkość ruchu postępowego rośnie liniowo z czasem: $v = \mu g t$, prędkość kątowa ruchu obrotowego maleje liniowo z czasem: $\omega = \omega_0 - \frac{\mu g t}{R}$. Po czasie t_0, gdy spełniony jest związek $v = \omega R$, rozpoczyna się toczenie bez poślizgu. Stąd $t_0 = \frac{v_0}{2\mu g}$. Na drugi walec działa siła tarcia skierowana do tyłu. Jego prędkość ruchu postępowego maleje liniowo z czasem, prędkość ruchu obrotowego rośnie liniowo z czasem. Po czasie t_0 drugi walec również zaczyna toczyć się bez poślizgu. Od chwili t_0 prędkości ruchu postępowego obu walców wynoszą $\frac{v_0}{2}$. Drogi przebyte przez walce w czasie t_0 wynoszą odpowiednio $s_1 = \frac{v_0 t_0}{2}$ i $s_2 = \frac{3\,v_0 t_0}{4}$. Maksymalna odległość, na jaką się oddalą, jest równa $\Delta s = \frac{v_0^2}{8\,\mu g}$.