Intuicjonizm i to, co po nim

Udowodnijmy lub obalmy twierdzenie: *istnieją takie liczby niewymierne a i b, że a^b jest liczbą wymierną.*

Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Jeśli jest ona wymierna, szukanymi liczbami są $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$. Jeśli natomiast $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna, to wraz z nią szukaną liczbą jest $\sqrt{2}$, bowiem $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. $\square$

Tego rodzaju dowód ma szczególną cechę: dowodzimy istnienia jakichś obiektów, nie umiejąc stwierdzić „co one za jedne”. Patrząc głębiej, widzimy, że wykorzystaliśmy tu tzw. zasadę wyłączonego środka: liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest wymierna albo jest niewymierna.

Wypada zdradzić tajemnicę: liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest nie tylko niewymierna, ale nawet niealgebraiczna, co wynika z twierdzenia Gelfonda–Schneidera: *jeśli liczby a i b są algebraiczne, przy czym a nie jest zerem ani jednością i liczba b jest niewymierna, to liczba a^b jest niealgebraiczna.*

Pojawianie się, począwszy od drugiej połowy XIX wieku, sytuacji krępujących matematyków, obiektów, których własności były nadmiernie paradoksalne, skłoniło część z nich (podpuszczaną zresztą przez Poincarégo) do narzucenia sobie (i zalecenia innym) ostrożności w dowodzeniu zwłaszcza istnienia jakichś obiektów: dowody *X istnieje, bo gdyby nie istniał, to olaboga!* zostały wykluczone. Nurt, którego ojcem założycielem okrzyknięto Luitzena Brouwera, nazwano *intuicjonizmem*. Jego rozwój przysporzył matematyce takich pojęć, jak funkcje obliczalne, algorytmy, a nawet maszyna Turinga. Dziś intuicjonizm, pod nazwą *konstruktywizmu* jest filozoficznym aspektem informatyki, ale to już inna historia.

Równość $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dla p i q całkowitych pociąga za sobą równość $p^2 = 2q^2$, co jest niemożliwe, bo rozkład lewej strony na czynniki pierwsze zawiera parzystą liczbę dwójek, a prawej – nieparzystą.

Równość $\log_2 9 = \frac{p}{q}$ dla p i q całkowitych pociąga za sobą równość $9 = 2^{p/q}$, czyli $3^{2q} = 2^p$, co jest niemożliwe, bo w rozkładzie lewej strony są same trójki, a prawej – same dwójki.

Dowiedźmy jednak początkowe twierdzenie zgodnie z intuicjonistami: takimi liczbami są $\sqrt{2}$ i $\log_2 9$, bo $\sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\log_2 3} = 3$.

Marek KORDOS

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1525. *Udowodnić*, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $n2^n + 1$ jest pierwsza, to liczby $n+1$ oraz $n+2$ są złożone.
Rozwiązanie na str. 7

M 1526. Niech $f(x) = x^2 - 2$. *Udowodnić*, że dla każdego $n \geqslant 1$ równanie

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(f}_{n\text{-krotne złożenie } f}(x))\ldots))) = x$$

ma 2^n różnych rozwiązań rzeczywistych.
Rozwiązanie na str. 7

M 1527. Na przyjęcie przyszło n osób w kapeluszach ($n \geqslant 2$). Następnie każde dwie osoby przywitały się dokładnie raz, przy czym każde powitanie polegało na zamianie kapeluszami, które w danej chwili witające się osoby miały na głowach. Okazało się, że po nastąpieniu wszystkich powitań każdy miał z powrotem swój kapelusz. *Udowodnić*, że taka sytuacja jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy n daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4.
Rozwiązanie na str. 14

Przygotował Michał NAWROCKI

F 925. Na zawieszoną na nitce o długości $l = 1$ m doskonale odbijającą płytkę o masie 10 mg pada, prostopadle do jej powierzchni, wiązka światła laserowego. Jaka musiałaby być moc S padającego światła, aby pod jego działaniem wahadło, którym jest zawieszona na nitce płytka, wychyliło się o kąt $\alpha = 1°$ z położenia równowagi?
Rozwiązanie na str. 13

F 926. Nurek mający masę $m = 80$ kg nabrał pełno powietrza do płuc ($v = 5$ l) i wskoczył do wody. Z jakiej maksymalnej głębokości H nurek może wypłynąć, nie wykonując żadnych ruchów? Objętość ciała nurka to $V = 82$ l.
Rozwiązanie na str. 13