Sprawdź wymiary!

Idea analizy wymiarowej pochodzi od Fouriera. Jean Fourier jest, oczywiście, najbardziej znany jako twórca analizy fourierowskiej, wprowadzonej w pracy *Analityczna teoria ciepła* i opublikowanej po raz pierwszy w 1822 roku w Paryżu. W tej samej pracy Fourier wprowadził też analizę wymiarową. On pierwszy tak otwarcie napisał, że każda wielkość fizyczna „ma swój własny wymiar i wyrazy w tym samym równaniu nie mogą być porównywane, jeśli nie mają tej samej potęgi wymiaru". Fourier pisał wprost, że wprowadził pojęcie wymiaru, aby sprawdzać wyniki obliczeń.

Ten okrzyk często rozlega się na lekcjach fizyki. Czy warto sprawdzać wymiary? Przecież na lekcjach matematyki, gdzie też rozwiązuje się mnóstwo zadań, czegoś takiego się nie robi. Otóż warto. Z kilku powodów. W fizyce mamy do czynienia z wieloma wielkościami fizycznymi, mierzonymi w różnych jednostkach. Nie można porównywać wielkości mierzonych w różnych jednostkach, tak jak nie można porównywać jabłek i gruszek. Jeśli szukaną wielkością w jakimś problemie jest, na przykład, prędkość, a w wyniku dostajemy kilogram na sekundę, to wiadomo, że zrobiliśmy błąd w naszych obliczeniach. Sprawdzenie wymiarów pozwala zorientować się bardzo szybko, czy otrzymany wynik może być sensowny.

Analiza wymiarów pozwala nie tylko na sprawdzenie rachunków. Dzięki niej można znaleźć sposób na zapamiętanie różnych formułek, a nawet na ich wyprowadzanie. Na tym naprawdę polega siła analizy wymiarowej. Na podstawie uważnej analizy wymiarów wielkości fizycznych, mających wpływ na badane zjawisko, można czasem zgadnąć formułę matematyczną opisującą to zjawisko. Rozpatrzmy dwa przykłady: pierwszy – bardzo prosty i drugi – bardziej skomplikowany.

Weźmy pod uwagę wahadło matematyczne: punkt materialny o masie m zawieszony na nierozciągliwej nici o długości l. Jest to, oczywiście, model matematyczny fizycznego wahadła, gdzie zaniedbujemy rozmiary ciała zawieszonego na nici. Jeśli zgodzimy się na taki model, to tarcie powietrza pomijamy i ruch wahadła może zależeć jedynie od masy, długości nici i przyspieszenia ziemskiego g. Zapytajmy o okres wahań wahadła. Wielkość o wymiarze czasu można dostać tylko na jeden sposób

$$T \sim \sqrt{\frac{l}{\mathrm{g}}},$$

a więc okres nie może zależeć od masy wahadła, gdyż nie ma jak pozbyć się kilogramów! Oczywiście, analiza wymiarowa nie pozwala na znalezienie bezwymiarowego współczynnika proporcjonalności w powyższym wzorze. Można go znaleźć, wykonując, na przykład, pomiar okresu wahań dla wahadła o zadanej długości w miejscu o znanej wartości g. W ogólności zależy on od początkowego kąta odchylenia wahadła (też wielkość bezwymiarowa, a więc niepoddająca się analizie wymiarowej). Dla małych wahań wahadła współczynnik ten wynosi 2π.

Drugi przykład, który rozpatrzymy, jest bardziej skomplikowany. Rozważmy problem siły oporu cieczy lepkiej działającej na płynący statek. Jakie wielkości fizyczne mogą mieć wpływ na siłę oporu? Intuicja (doświadczenie) podpowiada nam, że siła oporu może zależeć od wielu czynników. Spróbujmy ograniczyć się do najważniejszych (budujemy więc model matematyczny): siła oporu F [kgm/s^2], prędkość statku v [m/s], rozmiary statku l [m], współczynnik lepkości cieczy μ [kg/(ms)], gęstość cieczy ρ [kg/m^3], przyspieszenie ziemskie g [m/s^2], przy czym w nawiasach podaliśmy jednostki określające wymiary. W naszych rozważaniach pominiemy napięcie powierzchniowe cieczy, prędkość wiatru, wielkość fal na powierzchni cieczy itp. Oznacza to, że otrzymane wyniki nie będą stosować się do ruchu owadów ślizgających się po powierzchni cieczy, żaglówek, ruchu statków w czasie silnych sztormów itp. Pomijamy też detale budowy statku, wprowadzając tylko jeden parametr charakteryzujący jego rozmiary, to znaczy naszym statkiem będzie kula o promieniu l.

Ruch cieczy lepkiej opisywany jest równaniami Naviera–Stokesa, których w ogólnym przypadku nie potrafimy rozwiązać. Zastosujmy więc analizę wymiarową. Mamy do dyspozycji sześć wielkości: F, l, ρ, μ, g i v. Może warto wytłumaczyć, dlaczego nie rozpatrujemy masy statku jako niezależnej wielkości fizycznej. Otóż, zgodnie z prawem Archimedesa, masa statku jest równa masie wypartej cieczy, a to z kolei jest rzędu ρl^3.

Zauważmy, że mamy jedynie trzy podstawowe jednostki: kilogram, metr i sekundę, w których mierzy się sześć wielkości. Jedynie trzy bezwymiarowe ich kombinacje mogą być niezależne. Wybierzmy je w następujący sposób:

$$C_D = \frac{F}{\rho v^2 l^2}, \qquad R = \frac{v l \rho}{\mu}, \qquad N_F = \frac{v^2}{l\mathrm{g}}.$$

Oczywiście, dowolna ich kombinacja też jest bezwymiarowa, ale wybraliśmy je tak, gdyż każda z nich wiąże się z inną cechą badanego problemu. Stała Reynoldsa R związana jest z lepkością cieczy μ, stała Froude'a N_F wiąże siły bezwładności ($\sim mv^2$) z siłami ciężkości ($\sim m\mathrm{g}$) w przepływie cieczy. Stała R charakteryzuje, na przykład, fale i zawirowania na powierzchni cieczy spowodowane ruchem statku. W końcu współczynnik oporu czołowego C_D nie zależy ani od μ, ani od g.

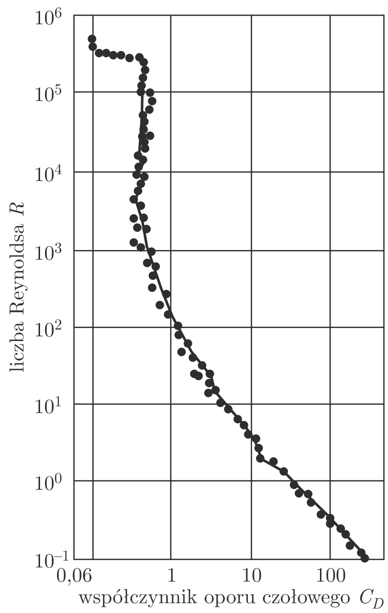
Analiza wymiarowa mówi nam, że bezwymiarowy współczynnik oporu czołowego C_D musi być pewną funkcją dwóch pozostałych bezwymiarowych wielkości, to znaczy

$$C_D = f(R, N_F).$$

Załóżmy teraz, że efekt fal tworzonych na powierzchni cieczy przez płynący statek jest zaniedbywalny (krańcowym przykładem będzie okręt podwodny). Wówczas stała g, odpowiedzialna za fale na wodzie, nie powinna wejść do rozwiązania, a więc stała Froude'a w powyższym wzorze może być pominięta. W języku wyjściowych wielkości wymiarowych dostajemy więc ostateczny wzór na siłę oporu

$$(*) \qquad F = \rho v^2 l^2 f(v l \rho/\mu).$$

W tym momencie można powiedzieć: no dobrze, ale przecież nie znamy funkcji f, więc jaki jest pożytek z otrzymanego wyniku? Żeby zrozumieć korzyść z naszych rozważań, zauważmy, że jeśli odłożyć na wykresie wartość siły F w zależności od długości l, to otrzymamy wiele różnych krzywych dla różnych cieczy, z których nic ciekawego nie da się odczytać. Jeśli natomiast odłożyć C_D w zależności od R, to wszystkie punkty powinny ułożyć się na jednej krzywej dla różnych cieczy i różnych rozmiarów statków!



Współczynnik oporu czołowego dla ruchu kulki w zależności od liczby Reynoldsa. Dane układają się na jednej krzywej.

Zauważmy, że z przedstawionego przez nas prawa skalowania wynika, że stosunek siły oporu do masy statku maleje ze wzrostem jego rozmiarów liniowych, gdyż

$$\frac{F}{m} \sim \frac{1}{l}.$$

W XIX wieku była to bardzo ważna obserwacja pokazująca, że opłacało się budować duże statki parowe do przewozu towarów.

Na rysunku przedstawione są wyniki pomiarów dla kul o różnych średnicach poruszających się w różnych cieczach.

Dane rzeczywiście układają się na jednej krzywej dla R zmieniającego się o 7 rzędów wielkości. Tego typu krzywa nosi nazwę krzywej skalowania. Znamy ją z wyników pomiarów. Zauważmy, że znalezione prawo skalowania $(*)$ pozwala wyciągnąć wnioski o ruchu wielkich statków ($l \to \infty$) z zachowania się małych statków poruszających się z dużymi prędkościami ($v \to \infty$), gdyż oba graniczne przypadki opisane są tą samą funkcją $f(R)$. Ściśle mówiąc, nie jest to prawda, gdyż dla bardzo dużych prędkości statków należy uwzględnić nowe parametry, na przykład prędkość dźwięku w cieczy, zjawiska termiczne spowodowane tarciem itp. Powyższa obserwacja jest podstawą teorii modelowania, tak ważnej przy projektowaniu statków, samolotów, dużych budowli itp. z użyciem tuneli aerodynamicznych.

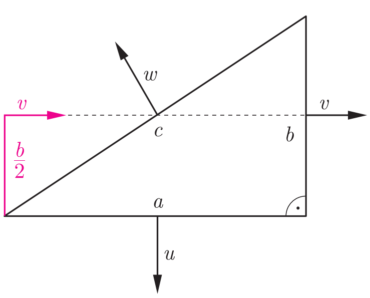
Użycie starannie dobranych zmiennych pozwala więc na przedstawienie wyników doświadczeń w sposób wskazujący bezpośrednio na fizykę badanych zjawisk. Odkrycie prawa skalowania jest często punktem wyjścia do budowy nowej teorii fizycznej. Pod koniec lat sześćdziesiątych J.D. Bjorken wysunął hipotezę, że w rozpraszaniu elektronów na nukleonach odpowiednio zdefiniowane wielkości, zwane funkcjami struktury nukleonu, powinny zależeć jedynie od jednej bezwymiarowej kombinacji dwóch zmiennych wymiarowych (tak zwana hipoteza skalowania Bjorkena).

Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych hipoteza skalowania została potwierdzona doświadczalnie. Można by zapytać znowu: i co z tego? Otóż, można teoretycznie wyprowadzić skalowanie Bjorkena jedynie wówczas, jeśli założy się, że nukleony składają się z punktowych, swobodnych składników – kwarków! W ten sposób hipoteza skalowania przyczyniła się do ugruntowania roli kwarków (wprowadzonych wcześniej jako hipotetyczne obiekty tłumaczące niektóre właściwości cząstek elementarnych) jako rzeczywistych składników materii. W tym sensie kwarki zostały zaobserwowane doświadczalnie.

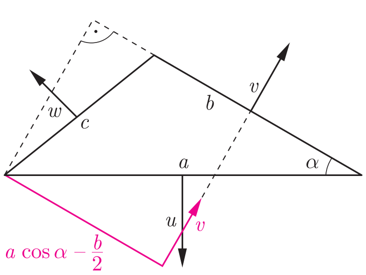
Analiza wymiarowa i skalowanie jest integralną częścią fizyki od ponad stu lat. Zastosowanie jej metod czterdzieści lat temu w fizyce jądrowej i fizyce cząstek elementarnych spowodowało radykalne zmiany w naszym rozumieniu podstawowych składników materii i przyczyniło się do przyjęcia kwantowej teorii pól jako podstawy do budowy teorii oddziaływań fundamentalnych. Sprawdzajcie więc wymiary!

Jest to skrót artykułu Jana KALINOWSKIEGO, który ukazał się w Delcie 1/1992.
Pełny tekst można znaleźć w książce „O kwantach i smokach. Fizyka według Delty" wydanej w listopadzie 2016.

Od Pascala do Pitagorasa i dalej



Rys. 1



Rys. 2

Twierdzenie Pascala o równomiernym ciśnieniu gazu na ścianki naczynia pociąga za sobą twierdzenie Pitagorasa i jego uogólnienie, czyli twierdzenie kosinusów.

Wyobraźmy sobie pudełko w kształcie trójkąta prostokątnego i o głębokości λ. Pudełko to jest położone poziomo i przymocowane w jednym z wierzchołków doskonałym łożyskiem do pionowej osi. Pudełko wypełniamy gazem, który prze na każdą ściankę. Parcie na górną i dolną jest jednakowe, więc one się znoszą. Jednak znosić się muszą i parcia na ścianki boczne. Przyjrzyjmy się im. Zgodnie z prawem Pascala mamy (rys. 1)

$$|u| = a\lambda p,\ |v| = b\lambda p,\ |w| = c\lambda p, \quad \text{gdzie } p \text{ to ciśnienie gazu.}$$

Równość momentów tych sił to $\frac{a}{2}a\lambda p + \frac{b}{2}b\lambda p = \frac{c}{2}c\lambda p$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

Dla trójkąta nieprostokątnego otrzymujemy (rys. 2)

$$\frac{a}{2}a\lambda p = \left(a\cos\alpha - \frac{b}{2}\right)b\lambda p + \frac{c}{2}c\lambda p, \quad \text{czyli } a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2,$$

a więc twierdzenie kosinusów.

Na tym przykładzie widać przewagę fizyki nad matematyką, bo z twierdzenia Pitagorasa, a nawet kosinusów, twierdzenia Pascala wyprowadzić się raczej nie da.

Marek KORDOS