Problem Stopu

Tak zwany Problem Stopu to problem decyzyjny, którego wejściem jest jakiś program Q i jakieś dane D, a którego rozwiązaniem (wyjściem) jest stwierdzenie, czy program Q uruchomiony na danych D zakończy swoje działania w skończonym czasie.

Twierdzenie. *Problem Stopu jest nierozstrzygalny.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że Problem Stopu jest rozstrzygalny, a więc, że istnieje program `P(Q,D)`, który zawsze (a więc w skończonym czasie dla każdych danych) rozstrzyga Problem Stopu. Rozważmy teraz następujący program `P’`, którego wejściem jest jakiś inny program `X`:

```
boolean P’ (program X)
{
  if (P(X, X))
     { while (true) do {}; }   //wymuszamy pętlenie się
  else
     { return true; }
}
```

Będziemy się zastanawiać, czy wykonanie `P’(P’)` zatrzyma się, czy nie.

Najpierw załóżmy, że się zatrzyma. Wtedy oczywiście (z definicji `P`) `P(P’,P’)` zwraca `true`. Jednak wówczas z kodu programu `P’` (spójrzmy na warunek po `if`) wynika, że `P’(P’)` się pętli w nieskończoność. Sprzeczność.

Z drugiej strony: załóżmy, że `P’(P’)` się nie zatrzyma. To jednak (znów analizujemy kod `P’`) implikuje, że `P(P’,P’)` zwraca `true`, ale to przecież oznacza, że `P’(P’)` się zatrzymuje. Ponownie uzyskaliśmy sprzeczność, co kończy dowód. □

Tomasz KAZANA

Indukcja pozaskończona

Indukcja pozaskończona wykorzystywana jest w dowodach istnienia różnych obiektów matematycznych. Główną częścią tego typu dowodu jest definicja indukcyjna (inaczej: rekurencyjna) funkcji.

Definicje funkcji przez indukcję pozaskończoną są uogólnieniem rekurencyjnych definicji ciągów. Rekurencyjna definicja ciągu (a_n) składa się z określenia wyrazu a_0 (lub kilku początkowych wyrazów) tego ciągu, a następnie pokazania, w jaki sposób każdy kolejny wyraz a_n $(n > 0)$ zależy od wyrazów wcześniejszych a_i, $i < n$. Taką strukturę ma następująca definicja indukcyjna ciągu Fibonacciego: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n > 1$. Jest intuicyjnie oczywiste, że powyższa definicja w jednoznaczny sposób definiuje ciąg: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

W następnym przykładzie definicja indukcyjna pewnego ciągu posłuży nam do dowodu istnienia funkcji f ze zbioru liczb wymiernych w liczby wymierne (oznaczane przez $\mathbb{Q}$), która liczby wymierne każdego przedziału (s, t), gdzie $s, t \in \mathbb{Q}$ i $s < t$, przekształca na cały zbiór $\mathbb{Q}$. Zatem funkcja f ma mieć tę własność, że dla każdej trójki liczb wymiernych (s, t, q), gdzie $s < t$ (oznaczmy zbiór wszystkich takich trójek przez T), istnieje taka liczba $p \in (s, t) \cap \mathbb{Q}$, że $f(p) = q$.

Skorzystamy z tego, że T jest zbiorem przeliczalnym, czyli takim, którego elementy można ponumerować liczbami naturalnymi. Innymi słowy, istnieje