Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2017

Zadania z matematyki nr 739, 740

Redaguje Marcin E. KUCZMA

739. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
- dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ ciąg (x_n) określony wzorami $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$) jest ciągiem arytmetycznym.

740. Obliczyć kres dolny wartości sumy

$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2},$$

gdy x, y, z mogą być dowolnymi liczbami dodatnimi, spełniającymi warunek $x+y+z=1$.

Zadanie 740 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2016

Przypominamy treść zadań:

731. Znaleźć wszystkie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera, przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, i spełniające równanie funkcyjne

$$f\big(xy\,f(x+y)\big) = f(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb $x, y \neq 0$ takiej, że $x + y \neq 0$.

732. Ciąg liczb naturalnych $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$; wyraz początkowy a_0 jest liczbą pierwszą. Dowieść, że dla każdego n różnica $a_{n+1} - 1$ jest podzielna przez a_n.

731. Ustalmy liczbę rzeczywistą $a \neq 0$ i przyjmijmy $b = 1/f(a)$. Załóżmy, że $a \neq b$. Możemy wówczas podstawić w podanym równaniu $x = b$, $y = a - b$ (bo $x, y \neq 0$), otrzymując związek

$$f\big(b(a-b)f(a)\big) = f(b) + f(a-b).$$

Ale $bf(a) = 1$, więc liczba po lewej stronie jest równa $f(a-b)$. Prawa strona ma inną wartość, skoro $f(b) \neq 0$ (wartości funkcji f są z założenia niezerowe).

Sprzeczność dowodzi, że $a = b$, czyli $f(a) = 1/a$. Wobec dowolności liczby $a \neq 0$ znaczy to, że funkcja f jest dana wzorem $f(x) = 1/x$ dla wszystkich $x \neq 0$. Sprawdzenie, że ta funkcja spełnia zadane równanie, jest natychmiastowe. Jest ona zatem jedynym rozwiązaniem tego równania.

732. Teza zadania: $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{a_n}$ – po wprowadzeniu określenia liczby a_{n+1} i dodaniu stronami jedynki – ma postać

$$(*) \qquad 2^{a_n} \equiv 2 \pmod{a_n}.$$

Liczba a_0 jest pierwsza, więc $(*)$ zachodzi dla $n = 0$ (małe twierdzenie Fermata). Dalej indukcja: przyjmijmy słuszność $(*)$ dla pewnego $n \geqslant 0$; istnieje zatem liczba $k \in \mathbb{N}$, dla której $2^{a_n} = 2 + ka_n$. Odejmujemy stronami jedynkę i mamy $a_{n+1} = 1 + ka_n$. Z określenia a_{n+1} wynika ponadto, że $2^{a_n} \equiv 1 \pmod{a_{n+1}}$. Tak więc

$$2^{a_{n+1}} = 2 \cdot 2^{ka_n} = 2\big(2^{a_n}\big)^k \equiv 2 \pmod{a_{n+1}}.$$

Uzyskaliśmy zależność $(*)$ z n zastąpionym przez $n+1$. To kończy dowód indukcyjny.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 725 ($WT = 1{,}86$) i 726 ($WT = 2{,}00$) z numeru 9/2016

Tomasz Wietecha	Tarnów	45,97
Witold Bednarek	Łódź	40,72
Zbigniew Skalik	Wrocław	39,62
Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08

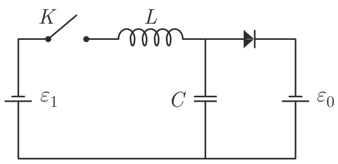
Tomasz Wietecha – w lidze fizycznej i matematycznej (łącznie) nie ma sobie równych. W samej matematycznej właśnie ukończył jedenaste okrążenie.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2017

Zadania z fizyki nr 636, 637

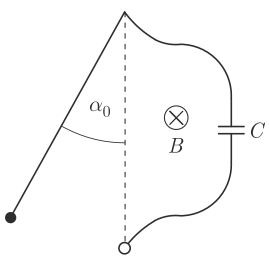
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

636. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 mamy $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$. Jaki ładunek przepłynie przez źródło o sile elektromotorycznej ε_0 po zamknięciu klucza K? Zakładamy, że opór omowy cewki i opory wewnętrzne źródeł są równe zeru. Dioda jest idealna, czyli jej opór w kierunku przewodzenia wynosi zero, a w kierunku przeciwnym jest nieskończenie wielki. Przed zamknięciem klucza kondensator był nienaładowany.



Rys. 1

637. Mała metalowa kulka o masie m, zawieszona na nieważkiej przewodzącej nici o długości l, wykonuje małe drgania z amplitudą kątową α_0 w płaszczyźnie pionowej, w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (rys. 2). Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny drgań wahadła. Gdy wahadło przechodzi przez położenie równowagi, podłączony zostaje do niego za pomocą cienkich, wiotkich przewodów kondensator o pojemności c. Czas kontaktu jest bardzo krótki i można przyjąć, że w tym czasie kondensator zostaje całkowicie naładowany. Znaleźć nową amplitudę kątową drgań wahadła.



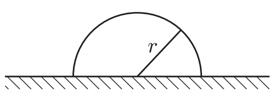
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 12/2016

Przypominamy treść zadań:

628. Rura o promieniu r zakopana jest do połowy w ziemi (rys. 3). Z jaką minimalną prędkością powinna odbić się od ziemi żaba, która chce przeskoczyć przez tę rurę?

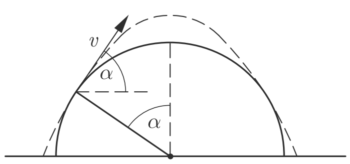
629. Kondensator naładowano do napięcia U_0 i po odłączeniu od źródła napięcia podłączono do niego opornik. W pewnym przedziale czasu na oporniku wydzieliła się w postaci ciepła energia W_1, a w następnym takim samym przedziale czasu energia W_2. Znaleźć pojemność kondensatora.



Rys. 3

628. Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że tor lotu żaby powinien być styczny do rury w jej najwyższym punkcie. Rozważmy jednak tor symetryczny względem osi pionowej przechodzącej przez środek rury i styczny do niej w dwóch punktach. Niech prędkość v żaby w punkcie styczności tworzy z poziomem kąt α (rys. 4). Z równań ruchu dla rzutu ukośnego otrzymujemy związek $v^2 = \dfrac{gr}{\cos\alpha}$. Zasada zachowania energii ma postać

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgr\cos\alpha,$$



Rys. 4

gdzie v_0 jest prędkością żaby w chwili odbicia. Aby znaleźć jej wartość minimalną, musimy odpowiedzieć na pytanie, dla jakiego kąta α funkcja

$$E(\alpha) = mgr\left(\cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right) = mgr\sqrt{2}\,\frac{\left(\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2 + 1}{2\sqrt{2}\cos\alpha}$$

ma minimum. W tym celu wystarczy obliczyć jej pochodną i przyrównać ją do zera. Możemy też skorzystać z nierówności $(a-b)^2 \geqslant 0$ i wynikającej z niej $\dfrac{a^2+b^2}{2ab} \geqslant 1$. Widzimy, że energia jest minimalna, gdy $\sqrt{2}\cos\alpha = 1$. Szukana minimalna prędkość żaby wynosi $v_{0\min} = \sqrt{2\sqrt{2}gr}$. Dla kąta $\alpha = 0$, gdy tor żaby styka się w najwyższym punkcie z rurą, $v_0 = \sqrt{3gr}$.

629. Z zasady zachowania energii mamy związek

$$\frac{U_0^2}{2c} = W_1 + \frac{U_1^2}{2c},$$

gdzie U_1 jest napięciem na kondensatorze po upływie czasu t. Gdy kondensator rozładowuje się przez opornik, natężenie prądu maleje wykładniczo w czasie

$$I = U/R = \left(U_0 e^{\frac{-t}{Rc}}\right)/R.$$

Moc chwilowa jest iloczynem kwadratu napięcia początkowego i funkcji czasu, zatem stosunek energii wydzielonych na oporniku w jednakowych przedziałach czasowych jest proporcjonalny do kwadratów napięć początkowych

$W_1/W_2 = U_0^2/U_1^2$. Szukana pojemność kondensatora wynosi

$$c = \frac{2W_1^2}{U_0^2(W_1 - W_2)}.$$