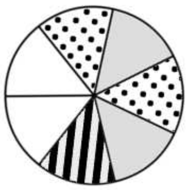
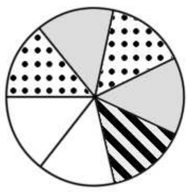
Zaprezentowane tu rozumowanie pochodzi z książki Henryka Pawłowskiego pt. „Kółko Matematyczne dla Olimpijczyków”, która dla autora tego tekstu jest po prostu ważna.





Małe Twierdzenie Fermata

Twierdzenie. *Dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby pierwszej p liczba $n^p - n$ dzieli się przez p.*

Dowód. Będziemy rozważać „koła fortuny” o p segmentach. Pytamy, ile istnieje różnych takich kół, przy założeniu, że mamy dostępne n kolorów. Oczywiście, gdyby koło było nieruchome, mielibyśmy n^p takich kół (każdy z p segmentów kolorujemy niezależnie na jeden z n kolorów).

Gdy uwzględniamy możliwość obracania koła, zauważamy, że metoda podana wyżej nie może być poprawna, bo niektóre koła liczone są więcej niż raz. Konkretniej: prawidłowo (a więc jednokrotnie) liczone są tylko koła jednobarwne. Natomiast każde koło niejednobarwne liczone jest dokładnie p razy — każdy kolejny obrót o jeden segment daje inny obrazek (dlaczego?).

Skoro kół jednobarwnych jest n, to różnych kół niejednobarwnych liczonych przy założeniu nieruchomości jest $n^p - n$. To oznacza, że różnych prawdziwych (obrotowych) niejednobarwnych kół fortuny jest dokładnie $\frac{n^p-n}{p}$. Ostatnia liczba jest, oczywiście, całkowita, a to kończy dowód tezy. $\square$

Wniosek: jeśli n nie dzieli się przez liczbę pierwszą p, to zachodzi $p \big| n^{p-1} - 1$. Czasem sam ten wniosek nazywa się Małym Twierdzeniem Fermata.

Tomasz KAZANA

Interpretacja kombinatoryczna

W tym artykule chcemy zaprezentować pewną technikę dowodową zwaną *interpretacją kombinatoryczną*. Metoda ta pokazana będzie w działaniu: podajemy dwa zadania wraz z rozwiązaniami, które są ilustracją tematu.

1. Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, 3n\}$, które nie zawierają dwóch liczb różniących się o n.

   ODP. Dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ jest dokładnie pięć możliwości opisujących, które z liczb $i, i+n, i+2n$ należą do podzbioru spełniającego warunek zadania. Mianowicie:
   (a) żadna z nich nie należy;
   (b) tylko i należy;
   (c) tylko $i+n$ należy;
   (d) tylko $i+2n$ należy;
   (e) liczby i oraz $i+2n$ należą (natomiast $i+n$ nie należy).
   Ponieważ dla różnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ możliwości te są niezależne, to liczba szukanych pozdbiorów wynosi 5^n.

2. Udowodnij tożsamość $\sum_k \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$ (F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego, czyli rozwiązanie równania rekurencyjnego $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, a zarazem liczbę pokryć paska $1 \times (n-1)$ kwadratami 1×1 i prostokątami 1×2).

   ODP. Zgodnie z uwagą wyżej, prawa strona to liczba pokryć paska $1 \times (2n-1)$ kwadratami 1×1 i prostokątami 1×2. Każde takie pokrycie musi zawierać co najmniej n elementów, w tym co najmniej jeden kwadrat. Jeśli w pokryciu wśród pierwszych n elementów jest dokładnie k kwadratów (i $n-k$ prostokątów 1×2), to można je rozmieścić na $\binom{n}{k}$ sposobów i pokrywają one w sumie prostokąt $1 \times (k + 2(n-k))$. Pozostały fragment paska $1 \times (k-1)$ można pokryć na F_k sposobów. Tę drugą interpretację opisuje lewa strona tożsamości, stąd teza. $\square$

Adam MALINOWSKI