Problem Stopu

Tak zwany Problem Stopu to problem decyzyjny, którego wejściem jest jakiś program Q i jakieś dane D, a którego rozwiązaniem (wyjściem) jest stwierdzenie, czy program Q uruchomiony na danych D zakończy swoje działania w skończonym czasie.

Twierdzenie. *Problem Stopu jest nierozstrzygalny.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że Problem Stopu jest rozstrzygalny, a więc, że istnieje program `P(Q,D)`, który zawsze (a więc w skończonym czasie dla każdych danych) rozstrzyga Problem Stopu. Rozważmy teraz następujący program `P'`, którego wejściem jest jakiś inny program `X`:

```
boolean P' (program X)
{
  if (P(X, X))
     { while (true) do {}; }   //wymuszamy pętlenie się
  else
     { return true; }
}
```

Będziemy się zastanawiać, czy wykonanie `P'(P')` zatrzyma się, czy nie.

Najpierw załóżmy, że się zatrzyma. Wtedy oczywiście (z definicji `P`) `P(P',P')` zwraca `true`. Jednak wówczas z kodu programu `P'` (spójrzmy na warunek po `if`) wynika, że `P'(P')` się pętli w nieskończoność. Sprzeczność.

Z drugiej strony: załóżmy, że `P'(P')` się nie zatrzyma. To jednak (znów analizujemy kod `P'`) implikuje, że `P(P',P')` zwraca `true`, ale to przecież oznacza, że `P'(P')` się zatrzymuje. Ponownie uzyskaliśmy sprzeczność, co kończy dowód. □

Tomasz KAZANA

Indukcja pozaskończona

Indukcja pozaskończona wykorzystywana jest w dowodach istnienia różnych obiektów matematycznych. Główną częścią tego typu dowodu jest definicja indukcyjna (inaczej: rekurencyjna) funkcji.

Definicje funkcji przez indukcję pozaskończoną są uogólnieniem rekurencyjnych definicji ciągów. Rekurencyjna definicja ciągu (a_n) składa się z określenia wyrazu a_0 (lub kilku początkowych wyrazów) tego ciągu, a następnie pokazania, w jaki sposób każdy kolejny wyraz a_n $(n > 0)$ zależy od wyrazów wcześniejszych a_i, $i < n$. Taką strukturę ma następująca definicja indukcyjna ciągu Fibonacciego: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n > 1$. Jest intuicyjnie oczywiste, że powyższa definicja w jednoznaczny sposób definiuje ciąg: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

W następnym przykładzie definicja indukcyjna pewnego ciągu posłuży nam do dowodu istnienia funkcji f ze zbioru liczb wymiernych w liczby wymierne (oznaczane przez $\mathbb{Q}$), która liczby wymierne każdego przedziału (s, t), gdzie $s, t \in \mathbb{Q}$ i $s < t$, przekształca na cały zbiór $\mathbb{Q}$. Zatem funkcja f ma mieć tę własność, że dla każdej trójki liczb wymiernych (s, t, q), gdzie $s < t$ (oznaczmy zbiór wszystkich takich trójek przez T), istnieje taka liczba $p \in (s, t) \cap \mathbb{Q}$, że $f(p) = q$.

Skorzystamy z tego, że T jest zbiorem przeliczalnym, czyli takim, którego elementy można ponumerować liczbami naturalnymi. Innymi słowy, istnieje ciąg trójek (s_n, t_n, q_n), gdzie $n \in \mathbb{N}$, którego zbiorem wyrazów jest T. Za jego pomocą indukcyjnie zdefiniujemy ciąg (p_n) taki, że $p_n \in (s_n, t_n) \cap \mathbb{Q}$ oraz $p_n \neq p_m$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$, o ile $n \neq m$. Mianowicie, określamy najpierw p_0 jako dowolną liczbę wymierną z przedziału (s_0, t_0) (np. $p_0 = \frac{t_0+s_0}{2}$). Następnie, jeśli $n > 0$ i dane są już wyrazy p_i dla $i < n$, to definiujemy p_n jako jedną z tych liczb wymiernych przedziału (s_n, t_n), które są różne od każdego p_i dla $i < n$. Wybór p_n jest możliwy, ponieważ w każdym niepustym przedziale otwartym jest nieskończenie wiele liczb wymiernych.

Mając dany ciąg (p_n), określamy funkcję f na wszystkich jego wyrazach jako $f(p_n) = q_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. To gwarantuje, że funkcja f ma żądaną własność: każda trójka $(s, t, q) \in T$ jest postaci (s_n, t_n, q_n) dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i wówczas $p = p_n$ jest tą liczbą wymierną z przedziału (s, t), dla której $f(p) = q$ (na pozostałych liczbach wymiernych, jeśli takie istnieją, można określić wartości funkcji f jakkolwiek).

Zmodyfikujemy teraz powyższe rozumowanie tak, by uzyskać funkcję g ze zbioru liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste (oznaczane przez $\mathbb{R}$), która każdy przedział (a, b), gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, przekształca na cały zbiór $\mathbb{R}$. Znanych jest wiele dowodów istnienia takiej funkcji. Przedstawimy tu argument oparty na *indukcji pozaskończonej*.

Niech W będzie zbiorem wszystkich takich trójek liczb rzeczywistych (a, b, y), że $a < b$. Jest on nieprzeliczalny, nie możemy więc jego elementów ponumerować liczbami naturalnymi. Skorzystamy jednak z tego, że istnieje (czego nie będziemy tu dowodzić) wygodny z punktu widzenia naszej sytuacji odpowiednik zbioru liczb naturalnych, mianowicie zbiór, który oznaczymy przez $\mathfrak{c}$, wraz z relacją $\preceq$, ustalającą pewien liniowy porządek jego elementów, o następujących własnościach:

1. Wszystkie elementy zbioru W można poindeksować za pomocą elementów zbioru $\mathfrak{c}$, czyli *ustawić w ciąg pozaskończony* trójek $(a_\alpha, b_\alpha, y_\alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathfrak{c}$.
2. Jeśli α jest dowolnym elementem zbioru $\mathfrak{c}$ oraz $\{x_\beta : \beta \prec \alpha\}$ jest dowolnym zbiorem złożonym z liczb rzeczywistych, poindeksowanych elementami zbioru $\mathfrak{c}$, mniejszymi w sensie porządku $\preceq$ od α, to w każdym przedziale (a, b), gdzie $a < b$, znajdzie się liczba różna od wszystkich liczb x_β dla $\beta \prec \alpha$.
3. W każdym niepustym podzbiorze zbioru $\mathfrak{c}$ istnieje element najmniejszy w sensie porządku $\preceq$.

Z pomocą ciągu pozaskończonego $(a_\alpha, b_\alpha, y_\alpha)$ (zob. warunek 1) przez indukcję pozaskończoną zdefiniujemy taki ciąg pozaskończony (x_α), że $x_\alpha \in (a_\alpha, b_\alpha)$ oraz $x_\beta \neq x_\alpha$ dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}$, o ile $\beta \neq \alpha$. Postępujemy zgodnie ze schematem wcześniejszej konstrukcji ciągu (p_n). Mianowicie, jeśli $\mathbf{0}$ oznacza najmniejszy w sensie porządku $\preceq$ element zbioru $\mathfrak{c}$ (taki element istnieje na mocy warunku 3), to określamy najpierw $x_\mathbf{0} = \frac{b_\mathbf{0}+a_\mathbf{0}}{2}$. Następnie, jeśli $\mathbf{0} \prec \alpha$ i dane są już wyrazy x_β dla $\beta \prec \alpha$, to definiujemy x_α jako jedną z tych liczb z przedziału (a_α, b_α), które są różne od każdego x_β dla $\beta \prec \alpha$. Wybór x_α jest możliwy na mocy warunku 2.

Wymaga jeszcze uzasadnienia, dlaczego opisana powyżej definicja indukcyjna prowadzi do jednoznacznego przypisania wartości x_α wszystkim $\alpha \in \mathfrak{c}$. Nieco upraszczając, gdyby zbiór tych $\alpha \in \mathfrak{c}$, którym powyższa definicja indukcyjna *nie* przypisała wartości, był niepusty, to na mocy warunku 3. istniałby w nim najmniejszy element, powiedzmy α_0. Wówczas $\mathbf{0} \prec \alpha_0$, gdyż wyraz $x_\mathbf{0}$ został zdefiniowany. Ponadto, na mocy definicji α_0 zdefiniowane byłyby wszystkie wyrazy x_β dla $\beta \prec \alpha_0$. To jednak – jak widzieliśmy powyżej – umożliwiałoby zdefiniowanie wyrazu x_{α_0}, co prowadziłoby do sprzeczności z definicją elementu α_0.

Na koniec, mając dany ciąg pozaskończony (x_α), określamy funkcję g na wszystkich jego wyrazach jako $g(x_\alpha) = y_\alpha$ dla każdego $\alpha \in \mathfrak{c}$ (por. warunek 1). Podobnie jak w przypadku funkcji f to już wystarczy, by funkcja g miała żądaną własność, co kończy dowód. □

Piotr ZAKRZEWSKI

Rozwiązanie zadania F 925.
Każdy foton odbity od płytki dostarcza jej pęd równy $\Delta p = p_1 - p_2$, gdzie p_1 to pęd fotonu padającego, a p_2 – pęd fotonu odbitego. Dla powierzchni doskonale odbijającej pędy p_1 i p_2 mają tę samą wartość p_1, ale różnią się zwrotem, stąd zmiana pędu płytki wynosi $\Delta p = 2p_1$. Energia W padających na płytkę w ciągu 1 s fotonów jest z definicji równa padającej na płytkę mocy S. Ponieważ pęd p fotonu wiąże się z jego energią W wzorem $p = W/\mathrm{c}$, gdzie c to prędkość światła, więc suma pędów fotonów padających na płytkę w czasie 1 s wynosi S/c, a pęd uzyskany przez płytkę w ciągu 1 s wynosi $2S/\mathrm{c}$. Zmiana pędu płytki w ciągu 1 s, na mocy drugiej zasady dynamiki, jest równa działającej sile, więc $F = 2S/\mathrm{c}$. Ponieważ wychylenie wahadła wiąże się z siłą wzorem $\operatorname{tg}\alpha = m\mathrm{g}/F$, znajdujemy, że potrzebna moc to $S = m \cdot \mathrm{g} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \mathrm{c}/2$ (przyjęliśmy, że dla $\alpha = 1^\circ$ kąt padania wiązki nie zmienia się). Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $S = 300$ W. Dla wiązki światła laserowego o średnicy 1 mm daje to gęstość mocy około 40 kW/cm^2, czyli z zakresu gęstości mocy stosowanych w technologiach cięcia i spawania metali.

Rozwiązanie zadania F 926.
Przy zanurzeniu na szukaną głębokość H średnia gęstość nurka powinna być równa gęstości wody, a więc jego objętość powinna być równa $m/\varrho = 80$ l, gdzie $\varrho = 10^3$ kg/m^3 to gęstość wody. Zmniejszenie objętości ciała o wielkość $\Delta v = V - m/\varrho = 2$ nastąpi – praktycznie biorąc – tylko w efekcie sprężenia powietrza w płucach, którego objętość zmaleje do $v - \Delta v = 3$ l. Przyjmując, że sprężenie następuje w stałej temperaturze, można zastosować prawo Boyle'a–Mariotte'a:

$$p_0 v = (p_0 + \varrho \mathrm{g} H)(v - \Delta v),$$

gdzie $p_0 = 10^5$ Pa to ciśnienie atmosferyczne. Stąd otrzymujemy, że nurek może wypłynąć, nie wykonując żadnych ruchów, z głębokości nieco mniejszej od

$$H = \frac{p_0}{\varrho \mathrm{g}} \cdot \frac{\Delta v}{v - \Delta v} = \frac{p_0}{\varrho \mathrm{g}} \cdot \frac{\varrho V - m}{m - \varrho(V - v)} \approx 7\,\mathrm{m}.$$