układu dla separacji a składa się z przyczynków od masy spoczynkowej i energii orbitalnej,

$$E = E_{\mathrm{ms}} + E_{\mathrm{orb}} = (m_1 + m_2)\, c^2 - \frac{\mathrm{G} m_1 m_2}{2a}.$$

Zakładając dla uproszczenia, że $m_1 = m_2$, oraz że końcowa separacja $a_{\mathrm{fin}} = 2R_s = 4\mathrm{G}m_1/c^2$ (w rzeczywistości układ staje się niestabilny dla nieco większych separacji) różnicę energii między stanem początkowym ($a \to \infty$) i końcowym oceniamy na 6% całkowitej masy-energii (3,9 $M_\odot$ dla GW150914 i 1,3 $M_\odot$ dla GW151226, w porównaniu do 3 $M_\odot$ i 1 $M_\odot$ otrzymanych wyrafinowanymi metodami). Większość energii została wypromieniowana podczas przemierzania kilku ostatnich orbit oraz podczas procesu tworzenia końcowej czarnej dziury, którego nasz prosty model nie uwzględnia. W momencie największej „jasności” emitowana moc w obu przypadkach wynosiła około $10^{-3}\, c^5/\mathrm{G} \approx 3 \cdot 10^{49}$ W (składniki poruszały się z prędkościami mniejszymi niż prędkość światła, w odległości większej od promienia R_s końcowej czarnej dziury). Przewyższa ona o rzędy wielkości emisję nie tylko największych dotychczas znanych kosmicznych katastrof – izotropowa emisja błysków gamma to „jedynie” 10^{47} W – ale także sumaryczną emisję wszystkich gwiazd we Wszechświecie. Szacowana gwiazdowa jasność obserwowanego Wszechświata, zawierającego około 10^{11} galaktyk podobnych do Drogi Mlecznej, z której każda składa się z około 10^{11} gwiazd podobnych do Słońca, wynosi bowiem około $4 \cdot 10^{48}$ W.

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1522. Na zbiorze dodatnich liczb całkowitych określone są operacje $\oplus$ oraz $\odot$, takie, że dla każdej pary a, b dodatnich liczb całkowitych zachodzi

$$\underbrace{a \oplus a \oplus \ldots \oplus a}_{b \text{ wystąpień } a} = a \odot b,$$

a ponadto $\oplus$ jest łączne, $\odot$ zaś przemienne. Czy wynika z tego, że $\oplus$ oraz $\odot$ to „zwykłe” dodawanie i mnożenie? Czy implikacja będzie prawdziwa, jeżeli założenie o łączności operacji $\oplus$ zastąpimy założeniem o jej przemienności?
Rozwiązanie na str. 7

M 1523. Wielokąt wypukły został podzielony odcinkami na skończoną liczbę czworokątów. Udowodnić, że co najmniej jeden z nich jest wypukły.
Rozwiązanie na str. 7

M 1524. Udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje ciąg arytmetyczny n dodatnich liczb całkowitych, z których każda jest podzielna przez sumę swoich cyfr (w zapisie dziesiętnym).
Wskazówka. W rozwiązaniu można skorzystać z *twierdzenia o liczbach pierwszych*, na przykład używając szacowania $\pi(x) < 2x/\ln x$, prawdziwego dla dostatecznie dużych x, gdzie $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od x.
Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 923. W Układzie Słonecznym, poza planetami i ich księżycami, po orbitach okołosłonecznych porusza się też wiele mniejszych odłamków skalnych: planetoid i meteoroidów. Niektóre z nich, gdy wpadają do atmosfery ziemskiej, obserwujemy jako meteory. Oszacuj, z jaką maksymalną prędkością V względem Ziemi takie odłamki mogą wchodzić do jej atmosfery. Przyjmij, że masa Słońca $M_{\mathrm{S}} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, odległość Ziemia-Słońce $R_{\mathrm{ZS}} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, a stała grawitacji $\mathrm{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.
Rozwiązanie na str. 8

F 924. Oszacuj, jaki jest minimalny promień okołosłonecznej orbity żelaznego meteoroidu, na której pozostaje on jeszcze w stanie stałym. Temperatura topnienia taenitu (minerału, z którego są zbudowane meteoroidy żelazne) $T_{\mathrm{m}} = 1700$ K, promień Słońca $R_{\mathrm{S}} = 7{,}0 \cdot 10^8$ m, temperatura powierzchni Słońca $T_{\mathrm{S}} = 5800$ K, a stała Boltzmanna $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.
Rozwiązanie na str. 9