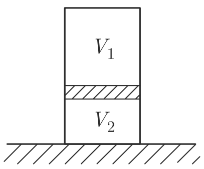
Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

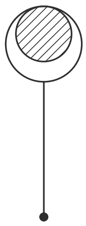
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

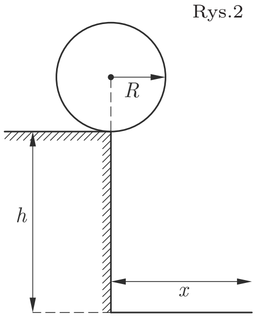
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2017



Rys. 1



Rys.2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 634, 635

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

634. W pionowym, zamkniętym naczyniu znajduje się tłok, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Z obu stron tłoka znajdują się jednakowe masy tego samego gazu doskonałego. W temperaturze T_0, jednakowej w całym naczyniu, objętość gazu nad tłokiem jest k razy większa niż objętość gazu pod tłokiem. Jaki będzie stosunek tych objętości, gdy temperatura wzrośnie do wartości T?

635. Do dolnego końca pręta o długości l przyczepiono małą kulkę o masie m, a do górnego końca rurkę w kształcie walca o wewnętrznym promieniu R. Masy pręta i rurki są zaniedbywalne. Rurka nasunięta jest luźno na nieruchomą, poziomą oś (rys. 2). Współczynnik tarcia między wewnętrzną powierzchnią rurki i osią jest równy μ. Dla jakich wartości kąta φ odchylenia pręta od pionu tak skonstruowane wahadło może znajdować się w równowadze?

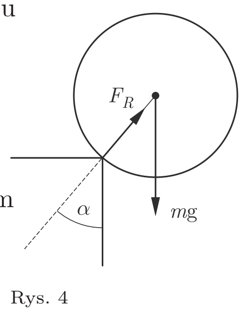
Rozwiązania zadań z numeru 11/2016

Przypominamy treść zadań:

626. Na skraju prostokątnego uskoku o wysokości h leży jednorodna kula o promieniu R, przy czym $h > \frac{R}{3}$ (rys. 3). W stanie początkowym kula znajduje się w stanie równowagi chwiejnej. Znaleźć odległość x miejsca upadku kuli na ziemię, zakładając, że jej ruch rozpoczął się z zerową prędkością początkową. Nie ma tarcia między kulą a uskokiem.

627. W pionowo ustawionym cylindrze z tłokiem znajduje się jednoatomowy gaz doskonały. Odległość tłoka od dna cylindra wynosi l. Po obciążeniu tłoka ciężarkiem o masie m i ustaleniu się równowagi temperatura bezwzględna gazu wzrosła dwukrotnie. Cylinder i tłok wykonane są z izolatora cieplnego. Obliczyć przyrost energii wewnętrznej gazu. Pominąć tarcie między cylindrem a tłokiem.

626. Dopóki kula nie traci kontaktu z uskokiem, działa na nią siła ciężkości mg oraz siła reakcji podłoża F_R (rys. 4). Ponieważ nie ma tarcia, siła reakcji skierowana jest wzdłuż promienia kuli. Obie siły mają zerowy moment względem środka kuli, zatem kula porusza się ruchem postępowym. Środek masy kuli porusza się po okręgu o promieniu R, a jego równanie ruchu ma postać:



Rys. 4

$$mv^2/R = mg\cos\alpha - F_R.$$

W momencie, w którym kula odrywa się od uskoku, siła reakcji znika: $mv_0^2/R = mg\cos\alpha_0$. Z zasady zachowania energii mamy $v_0^2 = 2Rg(1-\cos\alpha_0)$. W chwili oderwania kąt α_0, jaki tworzy prędkość kuli z poziomem, dany jest wzorem $\cos\alpha_0 = 2/3$, wartość prędkości wynosi $v_0 = \sqrt{2Rg/3}$, a dolny punkt kuli znajduje się na wysokości $h_0 = h - R/3$ nad ziemią. Po oderwaniu środek masy kuli porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością $v_{0x} = v_0\cos\alpha_0$, w kierunku pionowym spada w polu ciężkości z prędkością początkową $v_{0y} = v_0\sin\alpha_0$ i osiąga prędkość $v_y = \sqrt{5v_0^2/9 + 2gh_0}$ po czasie $t = (v_y - v_{0y})/g$. Szukana odległość dana jest wzorem

$$x = v_{0x}t + R\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}R\left(1 + \frac{2v_0^2}{3gR}\left(\sqrt{1 + \frac{18gh_0}{v_0^2}} - 1\right)\right).$$

627. Zmiana energii wewnętrznej gazu dana jest wzorem $\Delta U = nc_vT$, gdzie T jest temperaturą w stanie początkowym, n liczbą moli, a c_v molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości. Oznaczmy ciśnienia początkowe i końcowe w cylindrze odpowiednio przez p_1 i p_2. Równania Clapeyrona dla tych stanów mają postać:

$$p_1lS = nRT \text{ oraz } p_2(l-x)S = 2nRT,$$

gdzie x jest przesunięciem tłoka, a S jego polem powierzchni. Odejmując te równania stronami, otrzymujemy $(p_2 - p_1)lS - p_2xS = nRT$. Z warunków równowagi mamy $(p_2 - p_1)S = mg$, a z pierwszej zasady termodynamiki $p_2Sx = \Delta U = nc_vT$. Stąd $mgl = nc_pT$, uwzględniając, że $c_p = c_v + R$. Szukana zmiana energii wewnętrznej wynosi

$$\Delta U = \frac{mglc_v}{c_p},$$

a ponieważ gaz jest jednoatomowy, więc

$$\Delta U = 3mgl/5.$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2017

Zadania z matematyki nr 737, 738

Redaguje Marcin E. KUCZMA

737. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg ω, przy czym proste BC i AD przecinają się w takim punkcie F, że prosta EF jest styczna do ω. Druga prosta styczna do okręgu ω, równoległa do EF, przecina proste EA, EB, EC, ED odpowiednio w punktach K, L, M, N. Udowodnić, że odcinki KL i MN mają jednakową długość.

738. Wypisując, jedna za drugą, wszystkie liczby całkowite dodatnie, mające (w systemie dziesiętnym) co najwyżej n cyfr, piszemy łącznie c_n cyfr (np. $c_1 = 9$, $c_2 = 189$); w tym z_n zer (np. $z_1 = 0$, $z_2 = 9$). Czy równość $z_n = c_{n-1}$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 2$?

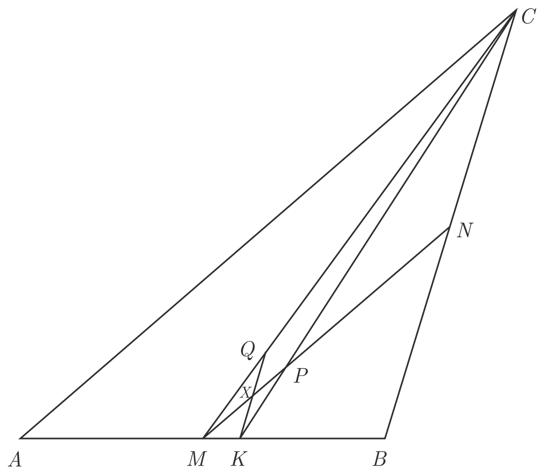
Zadanie 738 zaproponował pan Bartłomiej Pawlik z Limanowej.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2016

Przypominamy treść zadań:

729. W trójkącie ABC bok AC jest dłuższy niż BC. Punkt P leży na dwusiecznej CK kąta C, zaś punkt Q leży na środkowej CM, połowiącej bok AB; przy tym $MP \| AC$ oraz $KQ \| BC$. Wykazać, że odcinek PQ jest prostopadły do CK.

730. Wyznaczyć kres dolny zbioru liczb postaci $n\{n\sqrt{2}\}$ gdy $n = 1, 2, 3, \ldots$ (tradycyjne oznaczenie: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).



729. Oznaczmy przez X punkt przecięcia przekątnych czworokąta $KPQM$. Prosta MP, równoległa do AC, przecina bok BC w punkcie N, będącym środkiem tego boku. Skoro ów bok jest równoległy do KQ, zatem punkt X (leżący na prostej MN) jest środkiem odcinka KQ.

Z danych równoległości dostajemy ponadto równość kątów
$$|\sphericalangle PKX| = |\sphericalangle KCB| = |\sphericalangle KCA| = |\sphericalangle KPX|.$$
Trójkąt XKP jest więc równoramienny: $|KX| = |PX|$. Punkt X, jako środek odcinka KQ, jest w takim razie środkiem okręgu opisanego na trójkącie KPQ. Wynika stąd, że kąt KPQ jest prosty – a to teza zadania.

730. Ustalmy liczbę naturalną $n \geqslant 1$ i oznaczmy $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor = k$. Oczywiście $k < n\sqrt{2}$, czyli $k^2 < 2n^2$, zatem $2n^2 - k^2 \geqslant 1$. Dostajemy oszacowanie
$$n\{n\sqrt{2}\} = n(n\sqrt{2} - k) = \frac{n(2n^2 - k^2)}{n\sqrt{2} + k} \geqslant \frac{n}{n\sqrt{2} + k} >$$
$$> \frac{n}{n\sqrt{2} + n\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$
Uzyskane ograniczenie dolne okaże się być szukanym kresem dolnym. Pierwsza z powyższych nierówności staje się równością, gdy $2n^2 - k^2 = 1$; druga będzie „bliska równości”, gdy stosunek $k/n\sqrt{2}$ będzie bliski 1.

Wskażemy nieskończony ciąg rozwiązań (n, k) równania $2n^2 - k^2 = 1$. Para $(1, 1)$ jest rozwiązaniem. Dalej, jeśli para (n, k) jest rozwiązaniem, to $(n', k') = (3n + 2k, 4n + 3k)$ też, bowiem
$$2(n')^2 - (k')^2 = 2(9n^2 + 12nk + 4k^2) - (16n^2 + 24nk + 9k^2) =$$
$$= 2n^2 - k^2.$$
Istnieją więc rozwiązania (n, k) z dowolnie wielką wartością n. Gdy (n, k) jest dowolną z takich par, wówczas $k < n\sqrt{2} < k + 1$, czyli $k = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$, wobec czego (zgodnie z początkowym przekształceniem)
$$n\{n\sqrt{2}\} = \frac{n(2n^2 - k^2)}{n\sqrt{2} + k} = \frac{n}{n\sqrt{2} + k} <$$
$$< \frac{n}{n\sqrt{2} + (n\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2} - (1/n)}.$$
Liczba n może być dowolnie wielka, zatem ostatnie wyrażenie może mieć wartość dowolnie bliską $1/(2\sqrt{2})$. To dowodzi, że istotnie liczba $1/(2\sqrt{2})$ jest kresem dolnym zbioru wartości $n\{n\sqrt{2}\}$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 622 ($WT = 3{,}4$), 623 ($WT = 1{,}72$) 624 ($WT = 2{,}5$), 625 ($WT = 3{,}6$) z numerów 9/2016 i 10/2016

Michał Koźlik	Gliwice	39,32
Marian Łupieżowiec	Knurów	37,97
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jan Zambrzycki	Białystok	31,58
Jacek Konieczny	Poznań	29,51