

Analiza Starożytnych i Cyprian Norwid

Marek KORDOS

Podwojenie sześciianu to zadanie: skonstruuj odcinek $\sqrt[3]{2}$ razy dłuższy od danego.

W języku arytmetyki będzie to brzmiało: znajdź *dwie średnie proporcjonalne* dla a i $2a$. Dwie średnie proporcjonalne dla a i b to takie liczby x i y , że

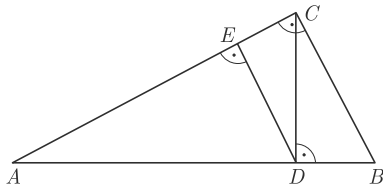
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Przykład geometrycznej realizacji jest na rysunku 1.

Podwojenie sześciianu byłoby zrealizowane, gdybyśmy umieli narysować taką konstrukcję dla $b = 2a$. Wtedy bowiem

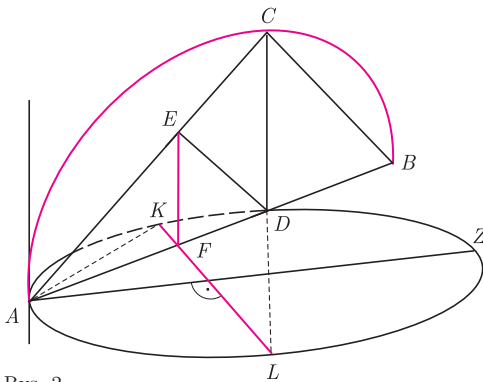
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}, \text{ czyli } \left(y = \frac{x^2}{a} \text{ i } y^2 = 2ax \right), \text{ czyli } \frac{x^4}{a^2} = 2ax, \text{ czyli } x^3 = 2a^3.$$

Archytas z Tarentu postanowił tę konstrukcję zrealizować, posługując się metodą nazwaną później *analizą Starożytnych*. Polega ona na przyjęciu założenia, że mamy żądany obiekt i badaniu jego jak najliczniejszych własności w nadziei na to, że może któreś ze znalezionych pozwolią ten obiekt skonstruować.



Rys. 1,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}.$$



Rys. 2

Pomysł Archytasa polegał na wskazaniu żądanych punktów w przecięciu trzech znanych powierzchni, czyli nie na płaszczyźnie, lecz w przestrzeni. W tym celu wyposażył rysunek 1 wykonany dla $AB = 2AE$ w półokrąg o średnicy AB , czyli o promieniu a . Na płaszczyźnie narysował okrąg o o promieniu a i na nim, prostopadle do płaszczyzny umieścił figurę z rysunku 1 w taki sposób, by punkty A i D znajdowały się na o . Oznaczmy jeszcze przez Z przeciwny do A koniec średnicy o . Następnie z E opuśćmy wysokość na AB otrzymując F i przez ten punkt poprowadźmy prostopadłą do AZ – jej przecięcia z o to K i L . Zauważmy, że

$$EF^2 = AF \cdot FD = KF \cdot FL.$$

Pierwsza równość wynika z tego, że w trójkącie prostokątnym AED wysokość jest średnią geometryczną odcinków, na jakie dzieli przyprostokątną. Druga równość wynika z podobieństwa trójkątów AFK i LFD . Nieoczekiwany wniosek to fakt, że trójkąt KEL okazuje się prostokątny (jako, że jego wysokość jest średnią geometryczną odcinków, na jakie dzieli KL).

Wyobraźmy sobie teraz okrąg opisany na KEL , którego średnicą jest KL . Leży on w płaszczyźnie prostopadłej do AZ . Zatem wszystkie z punktów K, L, E, C leżą na powierzchni stożka o osi AZ . Kąt pomiędzy osią a tworzącymi stożka to 60° , bo $AK = AL = AE = a$ (patrz rysunek 3).

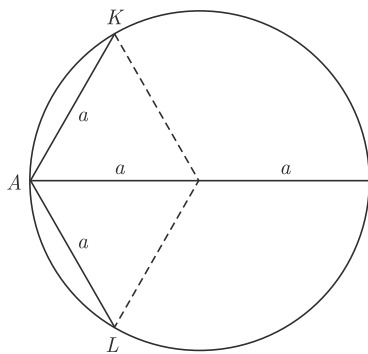
Koniec rozumowania Archytasa jest taki. Punkt C można zlokalizować, zauważając, że poza tym, iż leży on na stożku, leży on także na walcu o tworzących przecinających okrąg o i prostopadłych do jego płaszczyzny oraz na „torusie bez dziurki” – tę ostatnią powierzchnię otrzymamy, uzupełniając półokrąg opisany na ABC do okręgu i obracając go dookoła tej tworzącej walca, która przechodzi przez A .

A lokalizacja C pozwala na skonstruowanie trójkąta ABC .

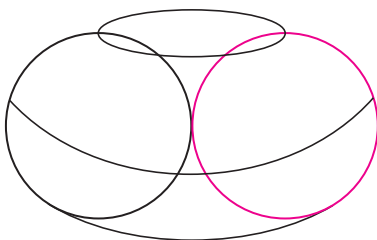
Wtedy $AD = \sqrt[3]{2} \cdot AE$.

Zapewne wielu zauważy, że to jakby zupełnie coś innego, niż to, co chcemy uznawać za konstrukcję. Wynika z tego pytanie, jak to się stało, że dziś dla nas konstrukcja musi być wykonywana na płaszczyźnie i to wyłącznie cyrklem i linijką. Czyżby znalazł się dyktator, który to zarządził? Z przykrością należy odpowiedzieć: TAK.

Po upowszechnieniu konstrukcji Archytasa z filipiką przeciw niemu (no, może nie z filipiką, bo mowy Demostenesa miały miejsce później) wystąpił Platon.



Rys. 3



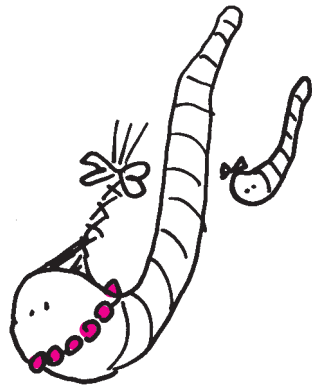
Rys. 4

Stwierdził, że używanie do konstrukcji struktur przestrzennych, a zwłaszcza powstających mechanicznie, urąga matematyce, która na czystej kontemplacji polegać powinna (to wziął dwa tysiąclecia później pod uwagę Nobel i tym uzasadnił nieprzyznanie matematykom nagrody). A czysta kontemplacja powinna operować jedynie tak ulotnym i niepraktycznym obiektem, jak – nieistniejąca przecież realnie – płaszczyzna i manipulować wyłącznie liniami doskonałymi, a więc w każdym punkcie jednakimi, jakimi na płaszczyźnie są jedynie proste i okręgi.



O dziwo, ta argumentacja okazała się przekonująca i matematycy pokornie przyjęli dyktat Platona. Samo zaś rozważanie przeciwstawienia czystej kontemplacji, jaką powinna być nauka, ponurej praktyczności (jakby Ełojów Morlokom) uznane zostało za niezbędny element wykształcenia kulturalnego człowieka i było nauczane aż do I wojny światowej nawet w gimnazjach klasycznych, gdzie matematyka była obecna tylko śladowo.

Dokumentem takich rozważań jest wiersz Cypriana Norwida poświęcony zadumie nad zdegradowaniem kontemplacji.



PLATO I ARCHITA

ARCHITA

*Geometrycznej nieświadom nauki
Widziałem prosty lud, kładący bruki,
I, jako kamień jedna się z kamieniem,
Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem –
Aż żal mi było bezwiedności gminu,
Mimo że wieczną on jest wagą czynu!...
Więc – Geometrii myślane promienie
(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenie,
Sferyczność w drzewie wytkuwszy toporem
Siłami ramion pchnę brązowe walce,
Promienne jeśli kołom natknę palce...
To – któż wie...*

PLATO

*Boskie zmysłowiąc obrysy,
Archito! – koturn rzucisz za kulisy –
Języka lotność niebieskiego zgrubisz*,
Więc Filozofię, Grecję może, zgubisz...*

ARCHITA

*O! Plato... padam przed prawdy bez-konńcem,
I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płaczę,
Tak wielce wszystko przesiąkłe jest słońcem,
Któremu nie ty, ni ja biegów znaczę;
Dlatego świętych nie niżę arkanów,
Ani ojczyzny kraglą tarcz wyszczerbię,
Owszem: z tych, które rażą cię dziś, planów,
Z kres tych na Grecji idealnym herbie,
Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwignie
(Lubo promiennność uroku w nich stygnie),
Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,
Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,
Sykulów mówię, na przykład, siedziba**,
Tę siły ramion zmnożywszy nauką,
Nie zdoła bronić się jak morska ryba?...*

PLATO

Przyjdzie – i tobie dzień zwycięstwa – sztukol...

*Idealność Platona była przeciwną rodzącej się właśnie mechanice, uważając ją (w pierwotnym jej ekstremie) jako zdegradowanie kontemplacji

(przypis Poety)

**To się odnosi do przyszłości już wyraźniejszej mechaniki, której Archimed na rzecz ojczyzny zażył

(przypis Poety)