



mała delta

Znajomi moich znajomych

Wojtek leżał na podłodze i czytał właśnie książkę o grafach, którą wypożyczył z biblioteki. Alicja, jego młodsza siostra, która przeglądała w tym czasie portal społecznościowy, spytała nagle.

– Wojtek, czy uważasz, że jestem aspołeczna?

– Nie – uciął krótko.

– Mam 154 znajomych na NaszymPodwórku.

– To dużo.

– Krysia ma 210 znajomych, a Basia 245. Jednak nic nie przebije Ilony – najpopularniejszej dziewczyny w szkole – ma ona 510 znajomych.

Wojtek nie przejawiał zainteresowania rozmową ze swoją siostrą. Pochłonięty za to był lekturą.

– Obliczyłam właśnie, że moi znajomi mają średnio 172,1 znajomych.

– Jak to policzyłaś?

– No, normalnie – wzięłam średnią arytmetyczną.

– Zsumowałaś ręcznie 154 liczby?

– Nie bądź niemądry. Pomogłam sobie arkuszem kalkulacyjnym. Zresztą, to nie jest najważniejsze. Ważne jest to, że mam mniej znajomych na NaszymPodwórku niż średnio moi znajomi. Może powinnam się częściej udzielać w szkole? Od zawsze chciałam się zapisać na jakieś kółko zainteresowań.

– Uważam, że niepotrzebnie się przejmujesz. Myślę, że jest to sytuacja w pewnym sensie typowa.

– Przecież to matematycznie niemożliwe. Statystycznie połowa powinna mieć więcej znajomych niż średnio ich znajomi.

– No właśnie niekoniecznie. Weźmy tę twoją Ilonę. Ma ona 510 znajomych. Oznacza to, że podnosi ona średnią 510 osobom. Jeśli z kolei ktoś taki jak Tomek ma 10 znajomych, to obniża on średnią, ale tylko 10 osobom.

– No, nie wiem. Nie jestem do końca przekonana. Uważasz, że to jest jakaś reguła matematyczna? Można to udowodnić?

Wojtek zerwał się na równe nogi, chwycił za kartkę papieru i zaczął rysować.

– Być może możemy wykorzystać grafy!

– Grafy? – zaintrygowana się Alicja.

– Tak! Bo widzisz – znajomości na NaszymPodwórku można zaprezentować w postaci grafu. Te kropki, które teraz rysuję, to tak zwane wierzchołki. Każdy wierzchołek reprezentuje jednego użytkownika w serwisie. Teraz narysujemy krawędzie. Krawędzie to będą takie kreski między tymi wierzchołkami. Taka krawędź będzie oznaczała, że te dwie osoby mają się w znajomych.

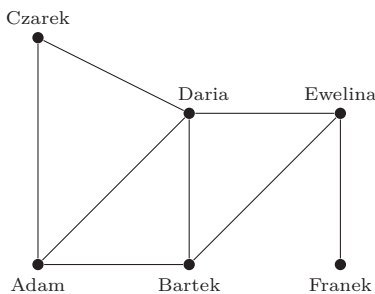
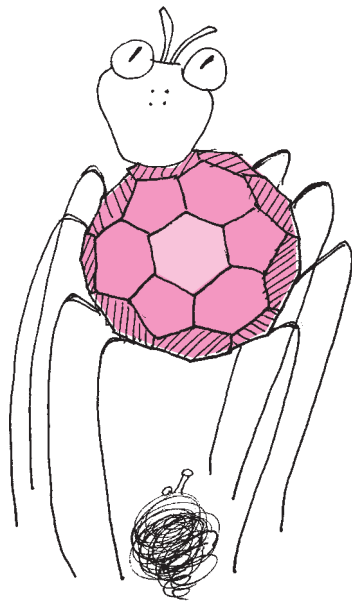
– Daria ma najwięcej znajomych.

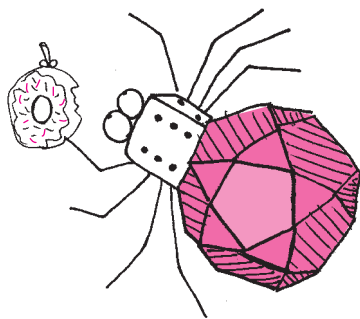
– Tak, ale...

– A Franek ma tylko jednego znajomego. To smutne.

– Nie o to chodzi! To tylko przykład. Policzmy lepiej, ile nasi bohaterowie mają znajomych.

– Adam ma trzech, Bartek też, Czarek ma dwóch. Daria ma czterech, Ewelina trzech, a Franek zna tylko Ewelinę. Biedny Franek.





– Czyli średnio mają $2\frac{2}{3}$ znajomych. Na przykładzie jest łatwo. Spróbujemy to teraz zrobić dla ogólnego grafu.

– Ale jak to zrobić? Przecież graf może wyglądać naprawdę przeróżnie!

– Każdy graf charakteryzują dwie liczby: liczba wierzchołków V oraz liczba krawędzi E . W naszym przykładzie $V = 6$, bo mamy 6 osób, a $E = 8$, bo mamy 8 krawędzi łączących te osoby.

– Czy to wystarczy? Żeby obliczyć średnią arytmetyczną, potrzebujemy wiedzieć, ile każdy wierzchołek ma znajomych.

– Wystarczy, że będziemy wiedzieli, jaka jest suma wszystkich znajomych. Popatrzmy na jedną krawędź. Na przykład, między Czarkiem a Darią.

Taka krawędź oznacza, że Czarek ma Darię w znajomych oraz Daria ma Czarka w znajomych. Zatem każda krawędź oznacza sumarycznie 2 osoby w znajomościach. Ponieważ mamy E krawędzi, oznacza to, że nasi bohaterowie mają sumarycznie $2E$ znajomych. Teraz wystarczy podzielić tę liczbę przez ilość osób, aby uzyskać średnią arytmetyczną.

– $2E/V$. Faktycznie, jak podstawimy do wzoru dane z naszego przykładu, dostaniemy ten sam wynik, jaki obliczyliśmy bez tego wzoru! – ucieszyła się Alicja.

– Teraz będzie trudniej. Dla każdego wierzchołka musimy obliczyć, ile średnio znajomych mają jego znajomi. Następnie z tych wszystkich wartości chcielibyśmy obliczyć średnią.

– Wydaje się to trochę skomplikowane. Znowu będziemy patrzyli na krawędzie?

– Spróbujmy. Jeśli Czarek ma C znajomych, a Daria D ... , to C dodamy do znajomych znajomych Darii, a potem podzielimy przez D , by obliczyć średnią. Tak samo będzie z Czarkiem. Do średniej liczby znajomych znajomych Czarka dodamy D/C .

Wojtek zapisał na papierze $C/D + D/C$.

– To jest zawsze większe od dwóch! – zauważyła Alicja.

– Jest?

– Tak! Mieliśmy to w szkole. Zobacz! Pani zaczęła od tego, że kwadrat żadnej liczby nie może być ujemny. Jak się skorzysta ze wzoru skróconego mnożenia i to, co nie jest kwadratem, przeniesie na drugą stronę, to bez trudu wpada się na pomysł, że oprócz sprowadzenia do wspólnego mianownika, można robić też coś odwrotnego. I gotowe!

– Faktycznie. Ta suma będzie większa od dwóch... lub równa, ale tylko wtedy, gdy Czarek ma dokładnie tyle samo znajomych co Daria.

– Aha! Co musimy zrobić dalej?

– Musimy posumować po wszystkich krawędziach. Ponieważ mamy E krawędzi, otrzymam coś większego od $2E$...

– ... albo równego $2E$, jeśli wszyscy użytkownicy mają dokładnie tyle samo znajomych – zauważyła Alicja.

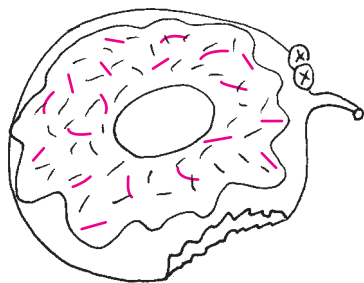
– I na koniec podzielić przez liczbę wierzchołków V , aby otrzymać średnią arytmetyczną.

– Czyli ostatecznie otrzymaliśmy coś większego lub równego $2E/V$... Czyli miałeś rację! Średnio nasi znajomi mają więcej znajomych niż my sami.

– No to, jak to już ustaliliśmy, mogę wrócić do mojej książki, a ty możesz wrócić do NaszegoPodwórka.

– Wiesz co? Chyba przejdę się do biblioteki poczytać o grafach. Mam w głowie tyle pytań. Na przykład, czy zawsze osoby, które mają mniej znajomych od średniej liczby znajomych jego znajomych, stanowią większość w grafie? A kto wie? Może przy okazji poznam kogoś ciekawego, kogo będę mogła dodać do znajomych na NaszymPodwórku.

$$\begin{aligned} (C - D)^2 &\geq 0 \\ C^2 + D^2 - 2CD &\geq 0 \\ C^2 + D^2 &\geq 2CD \\ \frac{C^2 + D^2}{CD} &\geq 2 \\ \frac{C}{D} + \frac{D}{C} = \frac{C^2}{CD} + \frac{D^2}{CD} &\geq 2 \end{aligned}$$



Odpowiedź na pytanie Alicji jest negatywna. Czy potrafisz znaleźć graf, w którym ponad połowa wierzchołków ma więcej znajomych niż średnia ilość znajomych jego znajomych? Podpowiedź: najmniejszy taki graf ma 5 wierzchołków. Czytelnik Leniwy znajdzie przykład w numerze.

Małą Deltę przygotował Krzysztof PIECUCH
doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski