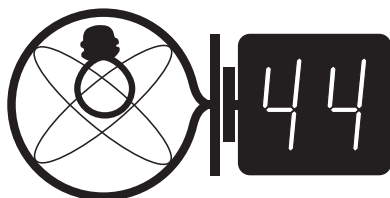


Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



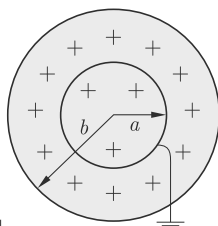
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2017

Zadania z fizyki nr 632, 633

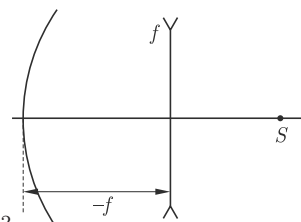
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

632. Dielektryczna kula o promieniu b naładowana jest ze stałą gęstością objętościową $\rho > 0$. Wewnątrz kuli znajduje się uziemiona, metalowa sfera o promieniu a (rys. 1). Znaleźć ładunek indukowany na tej sferze.

633. Cienka soczewka rozpraszająca o ogniskowej f i zwierciadło sferyczne wklęsłe mają wspólną oś optyczną (rys. 2). Środek zwierciadła znajduje się w jednym z ognisk soczewki. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu S umieszczonego w dowolnej odległości na prawo od soczewki. Znaleźć ogniskową zwierciadła.



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 10/2016

Przypominamy treść zadań:

624. Ciężarek o masie m zawieszony jest w polu ciężkości na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości k . Długość nierozciągniętej sprężyny jest zaniedbywalna. Sprężynę odchyłono do poziomu, rozciągnięto do długości x_0 i puszczono swobodnie. Znaleźć najmniejszą długość sprężyny podczas ruchu.

625. Na dnie naczynia znajduje się cienka metalowa płytka, której powierzchnia S jest dużo mniejsza od powierzchni dna naczynia. W naczyniu znajduje się ciecz o gęstości ρ i stałej dielektrycznej ϵ . Wysokość słupa cieczy jest dużo mniejsza od rozmiarów liniowych płytki. O ile podniesie się ciecz nad płytką, gdy na płytkę wprowadzony zostanie ładunek Q ?

624. Gdy sprężyna odchyłona jest od poziomu o kąt α , a jej długość wynosi $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ (rys. 3), siły działające na ciężarek w kierunku poziomym i pionowym mają postać

$$F_x = -kl \cos \alpha = -kx, \quad F_y = mg - kl \sin \alpha = mg - ky.$$

Ruch ciężarka jest złożeniem ruchów harmonicznym

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad y = mg/k + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Uwzględniając warunki początkowe: $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = v_y(0) = 0$, otrzymujemy

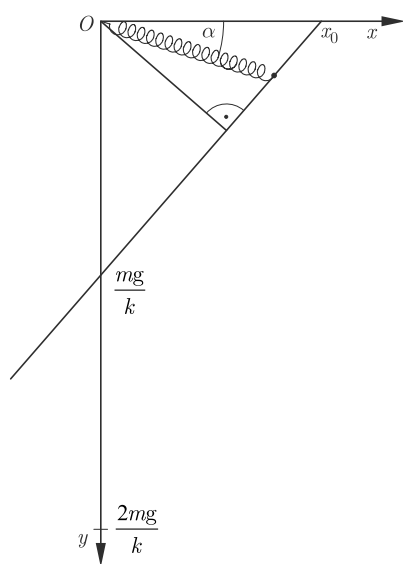
$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = mg(1 - \cos \omega t)/k.$$

Tor ciężarka

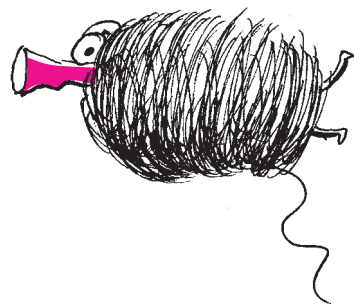
$$y = \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$$

jest linią prostą. Minimalna długość sprężyny dana jest wzorem

$$l_{\min} = \frac{mgx_0}{\sqrt{x_0^2 k^2 + m^2 g^2}}.$$



Rys. 3



Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44F
 po zakończeniu
 roku szkolnego 2015/16 (po 621 zadaniach)

Michał Koźlik	–	3–39,15
Tomasz Rudny	–	37,68
Marian Łupieżowiec	–	1–35,47
Andrzej Idzik	–	11–32,22
Jacek Konieczny	–	29,51
Jan Zambrzycki	–	30,86
Ryszard Woźniak	–	26,62
Krzysztof Magiera	–	3–24,30
Karol Łukanowski	–	23,89
Bogusław Mikieliewicz	–	22,45
Tomasz Wietecha	–	11–20,25
Jacek Grela	–	13,09
Jacek Piotrowski	–	2–12,75
Jerzy Witkowski	–	3–11,50
Andrzej Nowogrodzki	–	3–8,29
Jędrzej Biedrzycki	–	7,44

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2014–2016 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Liczba przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bala, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (11), T. Wietecha (11), J. Łazuka, M. Wójcicki, M. Koźlik, J. Witkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, P. Perkowski, J. Piotrowski;
 „jedenkrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Głuza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikieliewicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Punktacja zadań
 620 (WT = 1,6) i 621 (WT = 2,72)
 z numeru 6/2016

Jacek Grela (Kraków)	4,32
Jędrzej Biedrzycki (Strzelce Opolskie)	2,53
Jan Zambrzycki (Białystok)	2,10
Paweł Kubit (Kraków)	0,80

625. Naładowana płytka wytwarza pole elektryczne o natężeniu $E_0 = Q/(2\epsilon_0 S)$. Na powierzchniach warstwy cieczy nad płytką powstają ładunki indukowane Q_1 oraz $(-Q_1)$. Wypadkowe pole nad płytką możemy zapisać na dwa sposoby

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{Q - 2Q_1}{2\epsilon_0 S},$$

stąd

$$Q_1 = \frac{Q(\epsilon - 1)}{2\epsilon}.$$

Siła, z jaką ładunek Q na płytce i ładunek indukowany $(-Q_1)$ na dolnej powierzchni warstwy cieczy dielektrycznej odpychają ładunek indukowany Q_1 na górnej powierzchni cieczy, dana jest wzorem

$$F = \frac{(Q - Q_1)Q_1}{2\epsilon_0 S} = \frac{Q^2(\epsilon^2 - 1)}{8\epsilon_0 \epsilon^2 S}.$$

Siła ta powoduje podniesienie cieczy nad płytką o x i jest równoważona dodatkową siłą ciężkości o wartości $F = xS\rho g$. Szukana wysokość, na jaką podniesie się ciecz, wynosi

$$x = \frac{Q^2(\epsilon^2 - 1)}{8\epsilon_0^2 S^2 \rho g}.$$

* * *

Tym razem współczynnik trudności niektórych zadań z mechaniki okazał się większy niż spodziewany. W zadaniu **603** ($WT=3,28$) koralik zsuwał się bez tarcia po linii śrubowej i należało znaleźć wartość jego przyspieszenia po przebyciu określonej liczby zwojów. Niektórzy klubowicze nie zauważyli, że składowa przyspieszenia, prostopadła do toru, związana jest z ruchem po okręgu i leży w płaszczyźnie poziomej, bo ruch w pionie jest ruchem prostoliniowym. Zadanie **616** ($WT=2,88$) dotyczyło ruchu środka masy układu dwóch klocków połączonych pionową, ściśniętą początkowo sprężyną. Tu błędy były urozmaicone, w szczególności niepoprawny warunek na oderwanie się dolnego klocka, rozważenie tylko przypadku przed oderwaniem, albo po oderwaniu, błędne założenie, że po oderwaniu oba klocki poruszają się jednakowo. W pełni poprawne rozwiązania obu wymienionych zadań podał **Tomasz Wietecha**, przy czym były to rozwiązania bardziej ogólne niż wymagane – w zadaniu **603** potrafił określić kierunek wektora przyspieszenia w dowolnej chwili, w zadaniu **616** opisał ruch każdego z klocków po oderwaniu dolnego, a na końcu wyznaczył maksymalne wzniesienie środka masy. Wykazał się przy tym, jak zwykle, imponującą sprawnością rachunkową. Powstaje pytanie, czy w naszej zabawie bardziej cenimy takie ogólne rozwiązania, czy znacznie prostsze, pomysłowe, ale bardziej szczególne i chyba nie ma na to dobrej odpowiedzi.

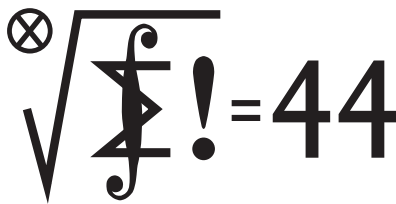
Pan **Wietecha** jako jedyny przysłał rozwiązanie, w dodatku poprawne, zadania **609** na temat wrzenia na powierzchni rozdziału dwóch niemieszających się cieczy. I tu pomyłkowo podany został przez mnie współczynnik trudności tego zadania $WT=3$, zamiast $WT=3,25$. Za ten błąd przepraszam, a panu Tomaszowi należy się dodatkowo 0,25 pkt.

W zadaniu **610** ($WT=3,85$) należało wyznaczyć granicę suchego obszaru wokół obracającego się ze stałą prędkością kątową mokrego koła. Okazało się, że nie dla wszystkich było oczywiste, że chodzi o krople odrywające się od obręczy koła z prędkością, jaką mają punkty na jego obwodzie. Zadanie było bardziej niż inne skomplikowane rachunkowo, stąd, być może, jego bardzo wysoki współczynnik trudności.

Poprawnego rozwiązania nie doczekało się zadanie **613** ($WT=3,7$) z optyki, gdzie należało znaleźć obraz Słońca otrzymany za pomocą układu dwóch zwierciadeł sferycznych i porównać go z obrazem otrzymanym za pomocą soczewki. Członkowie klubu, którzy przysłali swoje rozwiązania, uznali, że obrazem Słońca w zwierciadle czy soczewce jest punkt, czyli zaniedbali rozmiary kątowe Słońca widzianego z Ziemi.

Na ogół dobrze wypadły zadania z elektromagnetyzmu. Najwyższy współczynnik trudności otrzymało zadanie **617** ($WT=2,5$), gdzie należało wyznaczyć kąt ustawienia igiełki magnetycznej w polu magnetycznym Ziemi i szybko obracającego się przewodzącego pierścienia. Poprawnie rozwiązali to zadanie **Michał Koźlik** i **Tomasz Wietecha**.

Z przyjemnością odnotowuję fakt, że do grona osób, które regularnie przysyłają na ogół poprawne rozwiązania, dołączył pan **Jan Zambrzycki** z Białogostoku.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2017

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po zakończeniu sezonu
 (roku szkolnego) 2015/16

Marek Spychała	-	1-42,75
Tomasz Wietecha	-	10-42,11
Witold Bednarek	-	6-38,72
Franciszek S. Sikorski	-	1-38,08
Marek Galecki	-	5-37,76
Zbigniew Skalik	-	2-37,76
Jędrzej Garnek	-	2-37,64
Roksana Słowik	-	1-36,41
Krzysztof Maziarz	-	35,37
Adam Dzedzej	-	2-31,82
Marcin Małogrosz	-	1-30,28
Michał Koźlik	-	29,50
Michał Miodek	-	2-26,32
Patryk Jaśniewski	-	25,35
Paweł Duch	-	1-24,10
Krzysztof Kamiński	-	2-22,58
Jerzy Cisło	-	12-21,04
Marcin Kasperski	-	3-20,98
Bartłomiej Pawlik	-	19,71
Piotr Lipiński	-	1-18,80
Janusz Wojtal	-	18,58
Jędrzej Biedrzycki	-	17,62

Legenda (przykładowo): stan konta 6-38,72 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 38,72 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
 - stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 16 punktów;
 - przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2014, 2015 lub 2016.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (13), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (17), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (10), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. PeczarSKI, M. Adamaszek, P. Kubit (6), J. Cisło (12), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (7), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Zadania z matematyki nr 735, 736

Redaguje Marcin E. KUCZMA

735. Dana jest liczba dodatnia $a < 1$. Obliczyć kres górny zbioru wartości wyrażenia $a^{\text{tg } \alpha} + a^{\text{ctg } \alpha}$, gdy zmienna α przebiega przedział $(0, \pi/2)$.

736. Rozważamy słowa binarne (ciągi zerojedynkowe) długości n . Niech A_n będzie liczbą takich słów, w których nie pojawia się blok 010, zaś B_n liczbą takich słów, w których w żadnym miejscu blok 00 nie sąsiaduje z blokiem 11. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyc wartość stosunku A_n/B_{n+1} .

Zadanie 736 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2016

Przypominamy treść zadań:

727. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkątów o boku 1. Każdy wierzchołek powstałej siatki (tj. wierzchołek któregoś trójkątka) jest pomalowany na biało lub czarno. Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu zmieniamy kolor wszystkich wierzchołków, leżących na jednej linii prostej, zawierającej bok któregoś trójkątka.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 2$, dla których – wychodząc od stanu: wszystkie wierzchołki białe – można dojść do stanu: dokładnie jeden wierzchołek czarny.

728. Czy istnieje funkcja różniczkowalna f , będąca różnowartościowym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb dodatnich na ten sam zbiór, i taka, że jej pochodna jest funkcją odwrotną do f ?

727. Dla $n = 2$ wskazany cel da się osiągnąć. W trzech ruchach wybieramy proste zawierające boki dużego trójkąta. Jego wierzchołki pozostaną białe (każdy zmieni kolor dwukrotnie), zaś środki boków staną się czarne. Teraz w jednym ruchu zmieniamy kolor dwóch z tych środków z powrotem na biały. Pozostaje jeden punkt czarny.

Także dla $n = 3$ można uzyskać wymagany stan. Jak poprzednio, w trzech ruchach bierzemy proste, zawierające boki dużego trójkąta. Jego wierzchołki i jego środek staną się białe, pozostałe punkty siatki staną się czarne. W kolejnych trzech ruchach bierzemy proste równoległe do boków dużego trójkąta i przechodzące przez jego środek. Czarne punkty wybielą się, a punkt w środku się zczerni.

Natomiast dla $n > 3$ nie da się! W trójce punktów, będących wierzchołkami dużego trójkąta, po każdym ruchu jest parzysta liczba czarnych punktów (0 lub 2). Żaden z tej trójki nie może więc być owym punktem, który w pewnym momencie miałby stać się jedynym czarnym.

Każdy inny punkt siatki jest elementem pewnej szóstki punktów, tworzących sześciokąt foremny o boku 1. Również i w takiej szóstce każdy ruch powoduje zmianę koloru dokładnie dwóch punktów, więc niezmiennie jest w niej parzysta liczba czarnych punktów (0, 2, 4, 6). Pojedynczy czarny punkt pojawić się nie może.

728. Spróbujmy poszukać rozwiązania wśród funkcji postaci $f(x) = Ax^p$ (motywacja: zarówno pochodna, jak i funkcja odwrotna do takiej funkcji, też ma taką postać – próba ma szansę powodzenia). Gdy stałe A, p są dodatnie, funkcja $f(x) = Ax^p$ jest ściśle rosnąca i przekształca przedział $(0, \infty)$ na ten sam przedział. Dla ustalonej wartości $x > 0$ rozwiązujemy równanie $f(t) = x$ (z niewiadomą t), otrzymując $t = A^{-1/p}x^{1/p}$. Tak więc

$$f^{-1}(x) = A^{-1/p}x^{1/p}; \quad \text{ponadto} \quad f'(x) = Ap x^{p-1}.$$

Aby funkcje f^{-1} i f' były identyczne, wystarczy, by parametry dodatnie A, p spełniały równania

$$A^{-1/p} = Ap, \quad \frac{1}{p} = p - 1.$$

Drugie równanie ma w liczbach dodatnich jedyne rozwiązanie $p = (\sqrt{5} + 1)/2$. Dla tej stałej p pierwsze równanie przybiera formę $A^{1-p} = Ap$, z rozwiązaniem $A = p^{-1/p} = p^{1-p}$. Funkcja $f(x) = Ax^p$ z tymi parametrami ma wymaganą własność.

[Dla dociekliwych – pytanie: czy to jedyna taka funkcja? Jeśli nie – jak znaleźć wszystkie?]

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedziej, J. Fiett, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, M. Miodek, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Józwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, M. Małogrosz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piłkuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Teraz, jak co roku, wybrane zadania w skrótowym omówieniu. Więc głównie te, gdzie współczynnik trudności (WT) jest wysoki, a liczba poprawnych rozwiązań (LPR) niewielka. Ten ostatni skrót jest nieco mylący – chodzi raczej o liczbę uczestników, którzy poprawnie rozwiązali zadanie; gdy ktoś przysłał dwa dobre rozwiązania, wówczas „liczba rozwiązań”, rozumiana dosłownie, jest większa od przyjętej wartości LPR , zliczającej autorów dobrych prac. Z taką właśnie sytuacją mamy do czynienia w zadaniu, od którego rozpoczynamy omówienie.

* * *

Zadanie 710. [$a_0 > 1$, $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$; $b_n = n \ln n \Rightarrow a_n \sim b_n$ (tj. $a_n/b_n \rightarrow 1$)] ($WT=3,44$; $LPR=3$). Zadanie zaproponował pan **Tomasz Ordowski**, z heurystycznym argumentem na poparcie tezy. Obecnie mamy pięć rozwiązań (dwa od jednego autora). Firmowe (redaktora ligi) przebijają zawiloscią wszystkie pozostałe. Zgrabniejsze są trzy dowody z dwustronnym szacowaniem ciągu (a_n). Ukazemy je w skrócie; uzasadnienia nierówności (2), (3), (6), (7) nie są natychmiastowe, ale i niezbyt trudne – to rutynowe ćwiczenia na pierwszym roku studiów.

Jerzy Cisko: $a_n = a_0 + (\ln a_0 + \dots + \ln a_{n-1})$, skąd

$$(1) \quad n \ln a_0 < a_n < a_0 + n \ln a_n,$$

$$(2) \quad a_n > \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k \ln a_0) = \ln((n-1)!) + (n-1) \ln \ln a_0 > (n-1)(\ln(n-1) - A)$$

dla pewnej stałej $A > 0$. Skoro zaś $a_n < 2a_{n-1}$, zatem $a_n < 2^n a_0$, i wobec (1): $a_n < Bn^2$ dla pewnej stałej $B > 0$. Stosując jeszcze dwa razy prawą nierówność (1), znajdujemy stałą $C > 0$, dla której, kolejno,

$$(3) \quad a_n < a_0 + \ln(Bn^2) < Cn \ln n,$$

$$(4) \quad a_n < a_0 + n \ln(Cn \ln n) = a_0 + n(\ln C + \ln n + \ln \ln n).$$

Ciągi uzyskane po prawych stronach (2) i (4) są $\sim b_n$; teza.

Marcin Małogrosz: Ustalmy liczby dodatnie α, β , spełniające warunki: $3\alpha \leq a_3$, $\alpha \leq \ln a_3$, $\beta \geq 2$, $\beta \geq a_3/b_3$; indukcyjnie dowodzimy, że

$$(5) \quad \alpha \cdot n \leq a_n \leq \beta \cdot b_n \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Krok indukcyjny dla lewej nierówności jest bardzo łatwy; dla prawej – wymaga paru przekształceń, z których wynotujemy kluczowe kroki:

$$(6) \quad \begin{aligned} a_{n+1} - \beta \cdot b_{n+1} &\leq \beta \cdot (b_n - b_{n+1}) + \ln(\beta \cdot b_n) = \\ &= \beta \cdot n(\ln n - \ln(n+1)) + \ln \beta + \\ &\quad + \ln n + \ln \ln n - \beta \ln(n+1) < \\ &< (1 - \beta) \ln n + \ln \beta + \ln \ln n \leq 0. \end{aligned}$$

Dokończenie rozumowania ze wzoru Stolza

(z wykorzystaniem asymptotyki $b_{n+1} - b_n \sim \ln n$):

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{\ln a_n}{\ln n} = 1;$$

ostatnia równość wynika wprost z (5).

Janusz Olszewski: $a_{n+1} = \varphi(a_n)$, gdzie $\varphi(x) = x + \ln x$; niech $c_n = n \ln b_n$; wówczas

$$(7) \quad b_{n+1} < \varphi(b_n) \quad \text{dla } n \geq 17; \quad c_{n+1} > \varphi(c_n) \quad \text{dla } n \geq 1;$$

pierwsza z tych nierówności sprowadza się do $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq \ln n$ (prawda dla $n \geq 17$); druga – po wprowadzeniu wyrażeń definiujących c_n i b_n , obłożeniu obu stron funkcją \exp i po nietrudnych przekształceniach przybiera postać

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n+1} > \frac{\ln n + \ln \ln n}{\ln n}$$

– prawda, bo lewa strona jest większa od e , a prawa mniejsza od 2 . Teraz znajdujemy takie liczby naturalne

p, q , by $a_{p+17} > b_{17}$, $c_q > a_0$, i przez indukcję dostajemy z zależności (7) oszacowania $a_n > b_{n-p}$ dla $n \geq p + 17$ oraz $a_n < c_{n+q}$ dla $n \geq 0$. To już teza, bo $c_n \sim b_n$.

Te trzy rozwiązania mają wiele wspólnych elementów. Czwarte jest odmienne, i też efektowne:

Janusz Olszewski: Funkcja $f(x) = x/\ln x$ jest wklęsła w przedziale (e^2, ∞) , toteż

$$f'(a_{n+1}) < \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} < f'(a_n) \quad \text{gdy } a_n > e^2.$$

Oznaczając $g(x) = f'(x) \ln x$, $r_n = f(a_{n+1}) - f(a_n)$, $\delta_n = (\ln a_n)/(\ln a_{n+1})$, przepisujemy to oszacowanie jako $\delta_n g(a_{n+1}) < r_n < g(a_n)$; zatem $r_n \rightarrow 1$ (bo $\delta_n \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow 1$ przy $x \rightarrow \infty$). Stąd

$$\frac{f(a_n) - f(a_0)}{n} = \frac{r_0 + \dots + r_{n-1}}{n} \rightarrow 1.$$

Tak więc $\lambda_n := \frac{f(a_n)}{n} \rightarrow 1$, $\mu_n := \frac{\ln f(a_n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln \lambda_n}{\ln n} \rightarrow 1$, wobec czego $\lambda_n \mu_n \rightarrow 1$. Koniec, bo $\lambda_n \mu_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{\ln a_n - \ln \ln a_n}{\ln a_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$.

Zadanie 711. [Czy istnieje permutacja x_1, x_2, \dots zbioru \mathbb{N} o własności: $n|x_1 + \dots + x_n$?] ($WT=2,07$; $LPR=14$). Zasadniczo dwie metody, obie licznie reprezentowane. Albo, jak w firmowym, dołączanie po dwa wyrazy, albo dołączanie jednego wyrazu – najmniejszej liczby jeszcze nie wykorzystanej, a spełniającej wymagany warunek; jest to albo średnia arytmetyczna wcześniejszych wyrazów, albo następna dobra liczba. Ciąg jest obecny w OEIS (A019444), konstrukcja tą drugą metodą (algorytm „zachłanny”), wszelako bez dokładnych uzasadnień; przy odwołaniu do OEIS, uzupełnienie uzasadnień było niezbędne dla oceny maksymalnej.

Zadanie 713. [Czworokąt $ABCD$; okręgi (ABP) , (CDQ) styczne do CD i do AB w punktach P i Q ; ich wspólna cięciwa połowi $PQ \Rightarrow AD \parallel BC$] (WT=3, 51; LPR=3).
Dobre rozwiązania: **J. Olszewski**, **J. Węgrecki** (identyczne z firmowym) oraz (dość podobnie) **T. Wietecha**; było jeszcze jedno rozumowanie, rozpoczęte obiecująco, ale bez kluczowego uzasadnienia.

Zadanie 715. [Dane $A, B \in \mathbb{N}$, $A \neq B \Rightarrow$ zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$ jest sumą rozłącznych przesunięć zbiorów $\{-A, 0, B\}$, $\{-B, 0, A\}$] (WT=2, 20; LPR=7). **J. Cisko**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**, **R. Słowik** podali ten sam algorytm, co i rozwiązanie firmowe; **M. Małogrosz** – algorytm nieco bardziej skomplikowany (w każdym kroku modyfikacja wstecz), ale też bezbłędny. Dwaj uczestnicy zwrócili uwagę, że zagadnienie jest znane: **A. Dzedzej** wskazał jego obecność nawet w książce popularnej: R. Honsberger, *Mathematical Gems II* (MAA 1976) oraz zacytował pracę: A. D. Meyerowitz, *Tilings in \mathbb{Z} with triples* (J. Combin. Th. A 48 (1988), 229–235) (www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316588900088); zaś **P. Kumor** – tę samą pracę, a ponadto pracę: B. Gordon, *Tilings of lattice points in Euclidean n -space* (Discrete Math. 29 (1980), 169–174) (www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X80900047). Można się z nich dowiedzieć, że kratę \mathbb{Z}^n (i pewne jej podzbiory) da się pokryć rozłącznymi przystającymi kopiami dowolnego zbioru trójelementowego; a dla $n = 1$ zapoznać się z zagadnieniem, jak krótki blok kolejnych liczb całkowitych daje się pokryć zbiorami z zadania (dalsze odsyłacze bibliograficzne w cytowanych pracach).

Zadanie 716. [a, b, c – boki trójkąta $\Rightarrow \sum_{\text{cykl}} (a^2b + ab^2 - abc)^{1/2} > \frac{1}{2}(a + b + c)^{3/2}$; stała $\frac{1}{2}$ optymalna] (WT=1, 85; LPR=10). Sporo dobrych rozwiązań, w większości opartych na rozważaniach geometrycznych. Idąc tą ścieżką, **Piotr Kumor** uzyskał wzmocnienie tezy: różnica między lewą a prawą stroną nierówności jest $\geq Cr^{3/2}$, gdzie r to promień okręgu wpisanego, zaś C jest stałą, dającą równość w przypadku trójkąta równobocznego; zauważył też, że analogiczna nierówność zachodzi dla dowolnych n -kątów ($n \geq 3$), mających okrąg wpisany.

Zadanie 717. [$\triangle ABC$: $|\sphericalangle C| = 2 \cdot |\sphericalangle A|$; CD – dwusieczna ($\sphericalangle C$); S – środek okręgu stycznego (zewn.) do okręgów (ACD) , (BCD) i do półprostej $CA^{\rightarrow} \Rightarrow AB \perp CS$] (WT=3, 70; LPR=1).
Tylko jedno rozwiązanie: **Janusz Olszewski**; przy tym zupełnie odmienne od firmowego:

Jak w firmówce, oznaczmy przez k_1 okrąg o środku S , określony w zadaniu, a przez k_2, k_3 – okręgi (ACD) , (BCD) ; punkty styczności E, F, G – jak na rysunku. Z założenia $|\sphericalangle C| = 2 \cdot |\sphericalangle A|$ wynika, że prosta BC jest styczna do k_2 oraz że proste styczne do k_2, k_3 w punktach D i B są $\parallel AC$. Zatem jednokładność φ o środku E , która przekształca okrąg k_2 na k_1 , przeprowadza pierwszą z tych stycznych na prostą AC ; zaś jednokładność o środku G , która przekształca okrąg k_3 na k_1 , przeprowadza drugą z tych stycznych na AC ; tak więc $E \in FD$, $G \in FB$.

Z zależności kątowych łatwo teraz zobaczyć, że $\triangle FBA \sim \triangle DBG$, skąd $|BF| \cdot |BG| = |BA| \cdot |BD|$, czyli B leży na osi potęgowej okręgów k_1 i k_2 ; prosta BE jest ich wspólną styczną. Zatem prosta CE jest biegunową punktu B względem k_2 . W odwzorowaniu φ nie zmienia ona położenia – jest więc także biegunową punktu $B' = \varphi(B)$ względem k_1 . Z dualności biegunowych wynika teraz, że B' leży na biegunowej punktu C względem k_1 . Punkt F również na niej leży. Wobec tego $B'F \perp CS$. Pozostaje zauważyć, że $B'F \parallel BD$ (bo $F = \varphi(D)$). Pięknie!

Zadanie 721. [$\triangle ABC$; D, E, F – punkty styczności boków z okręgami dopisanymi $\Rightarrow [DEF] : [ABC] = r : 2R$] (WT=2, 44; LPR=10). Również i to zadanie okazało się znane lepiej, niż moglibyśmy sobie życzyć. Rozwiązanie firmowe polegało na wyprowadzeniu wzoru (*): $[DEF] : [ABC] = 2uvw : abc$ (gdzie $a = |BC|$, $u = |BD|$; $D \in BC$ (& cykl)); prace wszystkich uczestników też – mniej lub bardziej wyraźnie – do tej równości się sprowadzają.

W XXXVII O.M. wzór (*) pojawia się w rozwiązaniu firmowym zadania II-6, i to przy (słabszym) założeniu, że odcinki AD, BE, CF jedynie mają punkt wspólny (D, E, F to niekoniecznie punkty z naszego zadania). Ale – jak zauważył **Tomasz Wietecha** – już w XVI O.M. zadanie III-5 miało tezę jeszcze ogólniejszą: gdy D, E, F to dowolne punkty na odpowiednich bokach, wówczas $[DEF] : [ABC] = (uvw + (a-u)(b-v)(c-w)) : (abc)$; gdy działa twierdzenie Cevy, daje to wzór (*). **Paweł Kubit**, dla odmiany, odesłał do książki: S. I. Zetel, *Geometria trójkąta*, gdzie (w rozważaniach ilustrujących twierdzenie Van Aubela) także można znaleźć równoważną postać wzoru (*) dla przypadku objętego twierdzeniem Cevy.

Nie pierwszy to raz, i z pewnością nie ostatni, gdy zadanie ligowe dla wyjadaczy okazuje się folklorem. Na przykład:

Zadanie 723. [(F_n) – ciąg Fibonacciego; czy $\forall a, r \exists n : F_n \equiv a \pmod{r}$?] (WT=1, 33; LPR=16).
Banalne kontrprzykłady: $r = 8, 11, 12, 13, 16$ i wiele innych. **P. Kumor** – interesujący odsyłacz: S. A. Burr, *On moduli for which the Fibonacci sequence contains a complete system of residues*, Fibonacci Q-ly 9 (1971), 497–504 (www.mathstat.dal.ca/FQ/Scanned/9-5/burr.pdf).

