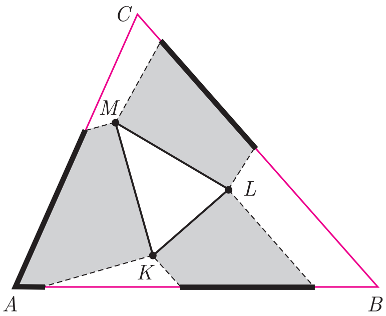
Jak długa jest kula?

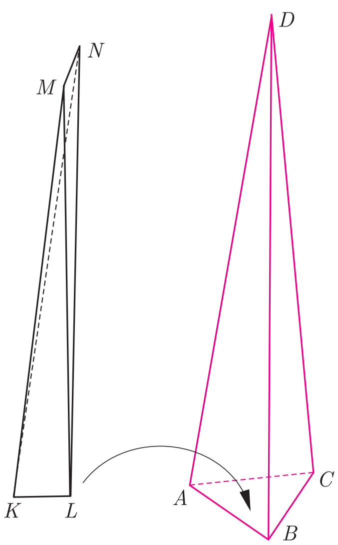
*Łukasz RAJKOWSKI**

Wyobraźmy sobie, że wewnątrz trójkąta ABC umieściliśmy trójkąt KLM. Wówczas pole KLM nie przekracza, oczywiście, pola ABC. Czy możemy stwierdzić to samo o obwodach tych trójkątów? W tym przypadku słowo „oczywiście” również wydaje się uprawnione, Czytelnicy *Delty* z pewnością wiedzą jednak, jak łatwo o nadużycie tej formułki. Szczęśliwie w tej sytuacji nie pociągałoby to za sobą tragicznych konsekwencji, gdyż istotnie, również obwód trójkąta KLM nie przekracza obwodu trójkąta ABC. Jeden ze sposobów uzasadnienia tego faktu jest następujący: dla każdego boku trójkąta KLM wyobraźmy sobie słońce świecące prostopadle do wybranego boku, umiejscowione po stronie pozostałej części trójkąta KLM. Wówczas na brzegu trójkąta ABC pojawią się rozłączne cienie boków trójkąta KLM, o długościach nie mniejszych od długości odpowiadających im boków KLM (rysunek obok powinien rozjaśnić wszelkie niejasności tego słonecznego opisu).



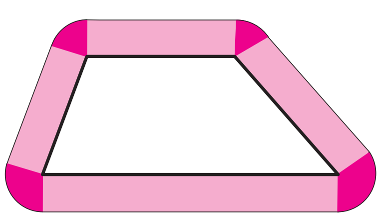
Czy przedstawiona własność przysługuje również innym wielokątom? Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że nie – jeśli wewnętrzny wielokąt jest dostatecznie „połamany”, jego obwód może śmiało przewyższyć obwód wielokąta zewnętrznego. Nietrudno jednak naprawić tę przykrość, gdyż wystarczy zażądać, aby rozważane wielokąty były wypukłe i wówczas przedstawiony wcześniej argument o „rozłączności cieni” pozostaje w mocy.

Skoro tak dobrze poszło nam na płaszczyźnie, spróbujmy naszych sił w trzech wymiarach. Jeśli pewien wielościan wypukły jest zawarty w innym, to objętość zawartego jest nie większa od objętości zawierającego. Odnośnie pól powierzchni tych wielościanów, możemy zastosować rozumowanie analogiczne do dwuwymiarowego – teraz rozłączne cienie będą rzucane przez ściany wewnętrznego wielościanu (ponownie kluczowe jest założenie o wypukłości rozważanych obiektów). Kolejnym naturalnym zadaniem jest porównanie sumy długości krawędzi bohaterów naszych rozważań. Zapewne, nawet jeśli nie spotkałeś się wcześniej, Czytelniku, z tym problemem, zdążyłeś już pewnie kątem oka dostrzec rysunek na marginesie, który bez cienia wątpliwości dowodzi, że sumy długości krawędzi wielościanów – nawet wypukłych – nie porównują się już w sposób tak elegancki, jakby sugerowały to nasze wcześniejsze przemyślenia. Czy istnieje sposób na uratowanie choćby części naszych przypuszczeń?



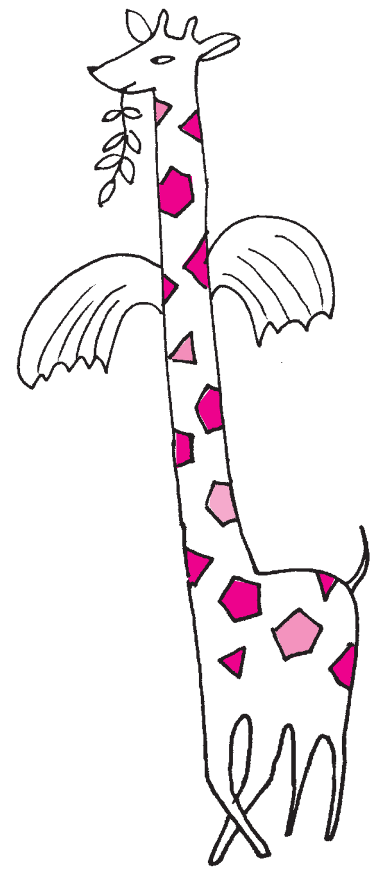
Dla tych, którzy mają cień wątpliwości, dodatkowe wyjaśnienie: odcinek MN musi być tak krótki, by zmieścił się w czworościanie $ABCD$, mimo, iż krawędzie KM, ML, LN i NK są tylko niewiele krótsze od krawędzi AD, DB i DC.

Okazuje się, że tak! Wystarczy każdej krawędzi badanych wielościanów przypisać wagę równą zewnętrznemu kątowi między ścianami spotykającymi się wzdłuż tej krawędzi. Aby się o tym przekonać, rozpoczniemy od słynnego zadania o żyrafie, którym bawione są kolejne pokolenia uczniów. Brzmi ono następująco: wybieg dla żyrafy jest otoczony płotem w kształcie trapezu o obwodzie 100 metrów i polu 300 m^2. Żyrafa ma szyję długości dwóch metrów i bardzo duży apetyt; oblicz pole powierzchni obszaru znajdującego się w zasięgu żyrafiej paszczy.



Na pierwszy rzut uczniowskiego oka problem wydaje się mieć podejrzanie mało założeń, chwila analizy rysunku na marginesie pozwala jednak stwierdzić, że istotnie żadnej innej informacji nam do szczęścia nie potrzeba. Dostępny dla żyrafy obszar spoza wybiegu można podzielić na prostokąty o wysokości 2 i podstawach będących którymś z boków wybiegu oraz fragmenty kół o promieniu 2 i środkach w wierzchołkach wybiegu. Suma pól wspomnianych prostokątów to przemnożony przez 2 obwód wybiegu, czyli 200, fragmenty kół natomiast sumują się do pola całego koła o promieniu 2, czyli 4π. Ostateczna odpowiedź na pytanie to $300 + 100 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2$. Warto zauważyć, że przedstawione rozumowanie pozostaje słuszne, jeśli o wybiegu założymy tylko, że jest wielokątem wypukłym – dzięki temu wymienione wcześniej części badanego obszaru są rozłączne, a odpowiednie fragmenty kół składają się na jedno pełne koło.

Popuśćmy teraz wodze fantazji i wyobraźmy sobie *żyratoperze*, czyli żyrafy fruwające radośnie w powietrzu dzięki ogromnym, nietoperzowym skrzydłom.



Wybieg dla żyratoperzy to ogromny, wiszący w powietrzu druciany wielościan $\mathcal{A}$, o „okach” pozwalających żyratoperzom na przeciśnięcie ich szyi o długości d. Tym razem obszar, z którego żyratoperze mogą podjadać smakołyki, można podzielić na sam wybieg, prostopadłościany o wysokości d i podstawach będących ścianami wybiegu, fragmenty walców, których wysokości to krawędzie wybiegu, a podstawy to wycinki koła o promieniu d oraz fragmenty kul o środkach w wierzchołkach wybiegu i promieniu d.

Podobnie jak poprzednio, objętości wspomnianych prostopadłościanów sumują się do powierzchni wielokąta pomnożonej przez d, natomiast objętości fragmentów kul – do objętości całej kuli o promieniu d. Co z fragmentami walców? Nietrudno zauważyć, że każdy z nich ma podstawę o powierzchni $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi d^2$, gdzie α jest kątem zewnętrznym między ścianami spotykającymi się wzdłuż krawędzi będącej wysokością danego fragmentu walca. Jeśli więc przez $V_3(\mathcal{A})$, $V_2(\mathcal{A})$, $V_1(\mathcal{A})$ oznaczymy odpowiednio objętość $\mathcal{A}$, jego pole powierzchni oraz sumę długości krawędzi przemnożonych przez kąt zewnętrzny między odpowiednimi ścianami, otrzymamy

$$(\star) \qquad V_3\big((\mathcal{A})_d\big) = V_3(\mathcal{A}) + V_2(\mathcal{A}) \cdot d + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{A}) \cdot d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3,$$

gdzie $(\mathcal{A})_d$ to obszar dostępny żyratoperzom o długości szyi wynoszącej d. Oczywiście, jeśli wybieg żyratoperzy zostanie zmniejszony do wielościanu $\mathcal{B}$, znajdującego się wewnątrz $\mathcal{A}$, to obszar w zasięgu ich żarłocznych paszcz również ulegnie zmniejszeniu i w tej sytuacji

$$V_3(\mathcal{A}) + V_2(\mathcal{A}) \cdot d + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{A}) \cdot d^2 \geqslant V_3(\mathcal{B}) + V_2(\mathcal{B}) \cdot d + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{B}) \cdot d^2$$

lub równoważnie

$$\frac{V_3(\mathcal{A})}{d^2} + \frac{V_2(\mathcal{A})}{d} + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{A}) \geqslant \frac{V_3(\mathcal{B})}{d^2} + \frac{V_2(\mathcal{B})}{d} + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{B}).$$

Widać, że wraz z wydłużaniem się żyratoperzych szyi rola składników związanych z objętościami i powierzchniami wielościanów w powyższym wzorze staje się zaniedbywalnie mała. W tej sytuacji otrzymujemy nierówność $V_1(\mathcal{A}) \geqslant V_1(\mathcal{B})$, na której tak nam zależało.

Wielkość $V_1(\mathcal{A})$ nosi nazwę *1-wymiarowej objętości wewnętrznej* wielościanu $\mathcal{A}$ i dzięki wykazanej powyżej monotoniczności ze względu na zawieranie może być również określona dla dowolnego ciała wypukłego $\mathcal{K}$ w przestrzeni poprzez przybliżanie ciała $\mathcal{K}$ wielościanami w nim zawartymi. Posługując się tą definicją, trudno nam będzie jednak wyznaczyć tytułową „długość kuli”, czyli $V_1(\mathbf{B}_r)$, gdzie $\mathbf{B}_r$ jest kulą o promieniu r. W sukurs przychodzi nam wzór $(\star)$, dziedziczony przez zbiory wypukłe po wielościanach, który po wykorzystaniu oczywistej zależności $(\mathbf{B}_r)_d = \mathbf{B}_{r+d}$ przyjmuje postać

$$\frac{4}{3}\pi(r+d)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 d + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{B}_r) d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Równość ta po redukcji daje $4\pi r d^2 = \frac{1}{2} V_1(\mathbf{B}_r) d^2$, czyli $V_1(\mathbf{B}_r) = 8\pi r$. To więcej czy mniej od 1-wymiarowej objętości wewnętrznej sześcianu o tej samej, co kula, objętości?

Rozwiązanie zadania F 921. Przyjmijmy, że wirnik odrzuca do dołu strumień powietrza o polu przekroju $\pi d^2/4$ z prędkością v. Jeżeli gęstość powietrza wynosi ρ, to w czasie Δt wirnik nadaje powietrzu o masie $\Delta m = \rho\pi d^2 v \Delta t/4$ pęd $\Delta p = \rho \pi d^2 v^2 \Delta t/4$ i energię kinetyczną $\Delta W = \rho\pi d^2 v^3 \Delta t/8$. Aby helikopter się wzniósł, wirnik musi wytworzyć siłę ciągu równą ciężarowi helikoptera z pilotem: $\Delta p/\Delta t = M\mathrm{g}$, a potrzebna do tego moc wynosi $P = \Delta W/\Delta t$ (g – przyspieszenie ziemskie). Korzystając z tego, że w warunkach normalnych objętość jednego mola gazu to $V_n = 22,4$ litra, znajdujemy, że gęstość powietrza wynosi $\rho = \mu/V_n \approx 1,3\ \mathrm{kg/m^3}$ i otrzymujemy $v = \frac{2}{d} \cdot \sqrt{\frac{M\mathrm{g}}{\pi\rho}} \approx 3,5\ \mathrm{m/s}$.

Stąd moc niezbędna dla uniesienia helikoptera z pilotem to

$$P = Mgv/2 \approx 1400\ \mathrm{W}.$$

Ponieważ wymagana moc jest prawie dziesięciokrotnie większa od mocy, jaką może rozwinąć pilot przy długotrwałej pracy mięśni – helikopter nie wzniesie się.

Rozwiązanie zadania F 922. Przyjmijmy, że komar macha skrzydłami z częstością f. Założymy, że amplituda machnięć jest rzędu długości skrzydła l i że skrzydła opuszczają się płasko, a podnoszą się krawędzią tak, że opór powietrza przy podnoszeniu można pominąć. Średnia prędkość powietrza odrzucanego skrzydłami w dół wynosi $v = fl$. Posługując się analizą wymiarową, znajdujemy, że $R = A\rho_1 S v^2/2$, gdzie $S = ld$ to powierzchnia skrzydła (współczynnik $A = 1/2$ z warunków zadania). Siła unosząca F jest równa średniej czasowej siły oporu działającej na skrzydło, pomnożonej przez liczbę skrzydeł i podzielonej przez dwa, ponieważ opór powietrza działa na skrzydło tylko przy jego ruchu w dół. Stąd $F = 2R/2 = \rho_1 S v^2/2 = \rho_1 f^2 l^3 d/2$. Siła ta musi równoważyć ciężar komara, więc $\rho_1 f^2 l^3 d/2 = m\mathrm{g} = \rho_2 l d^2 \mathrm{g}$, gdzie m to masa komara, g – przyspieszenie ziemskie. Ostatecznie $f = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2\rho_2 d\mathrm{g}}{\rho_1}} \approx 1\ \mathrm{kHz}$.

Otrzymany wynik dość dobrze zgadza się z obserwowaną częstością bzyczenia komara.