

o których wiadomo, że są niezależne od Aksjomatów Peano, ale mogą być udowodnione przy użyciu aksjomatów ZFC. Z kolei wiadomo, że słynna Hipoteza Continuum jest niezależna od aksjomatów ZFC.

Hipoteza ta mówi, że każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest albo równoliczny z całym zbiorem liczb rzeczywistych, albo jest równoliczny z jakimś podzbiorem zbioru liczb naturalnych – nie ma możliwości pośrednich!

Jednak na co dzień matematycy bardzo rzadko rozważają problemy niezależne od aksjomatów ZFC.

Podsumowując, nawet w matematyce niektóre fakty są przyjmowane „na wiarę”, i odpowiedź na niektóre – w pełni precyzyjne – pytania może brzmieć „to zależy”. Taka odpowiedź ma jednak bardzo konkretne znaczenie: oznacza, że potrafimy *udowodnić*, iż odpowiedź na to pytanie jest różna w różnych modelach spełniających nasze aksjomaty. Nie polecam więc wpisywać takiej odpowiedzi na egzaminie maturalnym!



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1516. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Na odcinkach AC , BC znajdują się odpowiednio takie punkty K , L , że $AK = CL$ oraz $\frac{AB}{KL} = k < 2$.

Wyznaczyć, w zależności od k , miarę kąta między prostymi AB i KL .

Rozwiązanie na str. 8

M 1517. Na ponad połowie pól szachownicy 7×7 ustawiono wieże. Wykazać, że co najmniej jedna wieża jest *otoczona*, tzn. zarówno w wierszu, jak i w kolumnie znajduje się pomiędzy pewnymi dwiema innymi wieżami.

Rozwiązanie na str. 9

M 1518. Każdą liczbę całkowitą większą od 1 pomalowano na pewien kolor w taki sposób, że jeżeli dla pewnych dwóch liczb a , b większych od 1 liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez $a + b$, to a ma ten sam kolor, co b . Jaka jest największa możliwa liczba kolorów użytych do pomalowania liczb?

Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 919. Osiągana przez kroplę deszczu prędkość opadania v rośnie z jej średnicą. Obserwacje wskazują, że duże krople osiągają prędkość około 10 m/s. Oszacuj, jakie średnie ciśnienie p wywiera na poziomy dach bardzo silny deszcz o intensywności $H = 20$ mm na godzinę (zakładamy, że woda natychmiast spływa rynnami). Przyjmij, że gęstość wody to $\rho = 10^3$ kg/m³.

Rozwiązanie na str. 17

F 920. Utrzymanie stałej temperatury ciała człowieka wymaga odprowadzania około $P = 100$ W mocy cieplnej. Ile wody musielibyśmy wypocić w ciągu doby, gdyby pocenie było jedynym procesem chłodzenia (tak jest, gdy temperatura otoczenia staje się bliska $t = 37^\circ\text{C}$)? Oszacuj, jak dużą powierzchnię S ciała musielibyśmy pozostawić odkrytą w otoczeniu o temperaturze $t_0 = 22^\circ\text{C}$, gdyby promieniowanie cieplne było jedynym mechanizmem chłodzenia. Dla uproszczenia zakładamy, że odzież doskonale izoluje cieplnie, a współczynnik promieniowania przez skórę jest bliski 1. Ciepło parowania wody wynosi $L = 2257$ kJ/kg, a stała Boltzmanna to $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m²K⁴).

Rozwiązanie na str. 17