Uczniowie

W 1967 roku szkoła podstawowa wypuściła po raz pierwszy absolwentów ośmioletniej podstawówki (tak, kiedyś też były reformy szkolne). W ogólnym reformatorskim zamieszaniu można było zrobić coś nietypowego, więc Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego uruchomił uniwersyteckie klasy matematyczno-fizyczne w liceum im. Klementa Gottwalda (w latach 1906–50 oraz po 1990 roku Stanisława Staszica) – pretekst był prosty: pierwszym dyrektorem tego liceum był Jan Zydler, znakomity nauczyciel matematyki i autor do dziś niezapomnianych podręczników geometrii.

Sprawie patronował profesor Stanisław Mazur, a organizatorem była pełna niewyczerpywalnej energii Hanna Szmuszkowicz.

W jednej z pierwszych klas uczyłem geometrii (bo klasy były dwie, a geometrii uczył także Jerzy Lisiewicz, algebry zaś Juliusz Brzeziński i Maciej Bryński – byliśmy przekonani, że skoro uczymy nauczycieli, to powinniśmy sami też zobaczyć, jak się to robi).

Na wiosnę 1969 roku przydarzyła mi się fantastyczna historia, którą chcę przypomnieć, bo w lipcu 2016 dowiedziałem się, że już obaj jej bohaterowie nie żyją.

Owi bohaterowie to uczniowie drugiej klasy liceum (czyli szesnastolatkowie): Jerzy Zabilski, później matematyk (zmarły w 2011 roku) i Wiesław Mielniczuk, później fizyk (zmarły w 2016 roku – dziwna jest ta kolejność naszego znikania).

W klasie zadaję zadanie: *wykazać, że dowolną izometrię płaszczyzny można uzyskać ze złożenia symetrii względem prostych należących do jednego pęku właściwego oraz jednego pęku niewłaściwego.*

Zakładam, że Czytelnik wie, iż każdą izometrię płaszczyzny (czyli przekształcenie nie zmieniające odległości) można uzyskać przez złożenie dwóch lub trzech symetrii względem prostych. Mających wątpliwości odsyłam do mojego artykułu w *Delcie* 11/2015.

Pęk właściwy $[A]$ to zbiór wszystkich prostych przechodzących przez A.

Pęk niewłaściwy $[a]$ to zbiór wszystkich prostych równoległych do a.

Rząd generowania przekształcenia to minimalna liczba generatorów (tu symetrii osiowych) niezbędnych do jego uzyskania. Maksymalna z tych liczb dla zbioru przekształceń to rząd generowania tego zbioru (tu izometrii).

Zadanie to klasa zbiorowo rozwiązuje (Czytelniku, rozwiąż i Ty), więc proponuję zadanie domowe: *wykazać, że dowolną izometrię płaszczyzny można uzyskać ze złożenia symetrii względem prostych należących do jednego pęku właściwego plus jedna prosta spoza tego pęku.*

Czworo uczniów odpowiedziało twierdząco. Wobec tego zaproponowałem pytanie dodatkowe: *jaki jest rząd generowania grupy izometrii w pierwszym i drugim przypadku?*

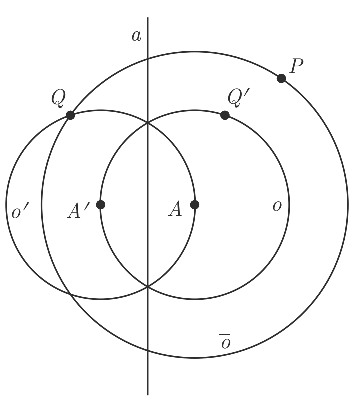
Tu niezbędne jest wyjaśnienie: nie wiedziałem, jaki jest wynik, ani nawet nie miałem pomysłu, jak się do tego zabrać (mój współnauczyciel też nie, a myślę, że wielu nie tylko wtedy, ale i do dziś nie wie).

Tymczasem moi dwaj bohaterowie podali wynik: 4 i ∞; i tym sposobem, jako nieletni uzyskali poważną publikację (Wiadomości Matematyczne XIII(1971), pp. 37-41) z rekomendacji profesora Stefana Straszewicza, twórcy olimpiad matematycznych.

A oto, jak uzyskali swoje rezultaty.

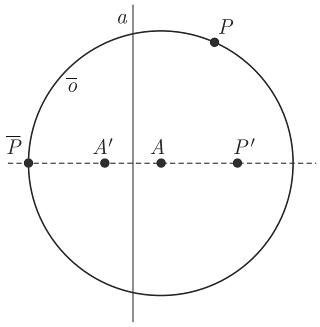
Do uzyskania wszystkich izometrii płaszczyzny wystarczą symetrie o osiach z $[A] \cup \{a\}$, gdzie $a \notin [A]$.

Dowód. Ponieważ izometria mająca punkt stały to obrót względem tego punktu lub symetria względem prostej przechodzącej przez ten punkt (a to mamy, bo możemy używać symetrii względem wszystkich prostych z $[A]$), wystarczy wykazać, że dowolny punkt P można nałożyć na A.



Przypadek 1: $|PA| \leqslant 4\,\mathrm{dist}(a, A)$.

Odbijamy A względem a, otrzymując A' i rysujemy okrąg o środku A i promieniu AA' – oznaczmy go o. Obraz okręgu o w symetrii względem a oznaczmy przez o'. Okrąg $\overline{o}$ o środku A, poprowadzony przez P, przecina okrąg o' (założenie!) w punkcie Q, więc możemy P przeprowadzić na Q za pomocą symetrii z $[A]$. Obraz Q' punktu Q w symetrii względem a leży na o, więc może być przez symetrię względem prostej z $[A]$ (konkretnie: symetralnej $Q'A'$) przeprowadzony na A', a stąd przez symetrię względem a na A.

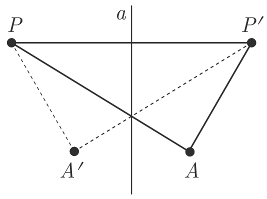


Przypadek 2: $|PA| \geqslant 4\,\mathrm{dist}(a, A)$

sprowadza się do przypadku 1: przez symetrię względem dwusiecznej $\sphericalangle PAA'$ punkt P przechodzi na $\overline{P}$ i przez symetrię względem a na P'. Ponieważ

$$P'A = \overline{P}A' = \overline{P}A - 2\,\mathrm{dist}(a, A) = PA - 2\,\mathrm{dist}(a, A),$$

więc odległość od punktu A zmniejszyła się o $2\,\mathrm{dist}(a, A)$, co powtarzane wielokrotnie (na załączonym obrazku widać, że gdy musimy wykonać więcej kroków niż jeden, kolejny zaczyna się od prostej z $[A]$ równoległej do a) daje spełnienie warunku z przypadku 1. □



Stwierdzenie, że rząd generowania jest w tym przypadku nieskończony, nawiązuje do rozważenia *Przypadku* 2 – tam przybliżaliśmy punkt P do punktu A. Zauważmy, że to przybliżanie nie może być wykonane większymi niż tam krokami.

Symetrie względem prostych z $[A]$ nie przybliżają bowiem punktów do A, symetria zaś względem a przybliża punkty nie więcej niż o $2\,\mathrm{dist}(a, A)$:

$$PA - P'A = PA - PA' \leqslant AA'.$$

A ponieważ możemy punkt P obrać dowolnie daleko, więc izometria nakładająca go na A może wymagać dowolnie wielu symetrii – rząd zatem jest nieskończony.

Tyle o przypadku, gdy osie symetrii były wybierane z $[A] \cup \{a\}$ dla $a \notin [A]$.

Pozostaje wykazanie, że

Rząd generowania dla prostych z $[A] \cup [a]$ jest równy 4.

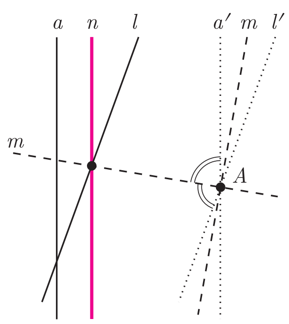
Dowód ma charakter raczej algebraiczny. Potrzebne są dwa lematy:

(1) $\forall\, A, m, n\ \exists\, k, l\ (S_m S_n = S_l S_k \wedge k \in [A])$,

który jest oczywisty. Istotnie, gdy $m \parallel n$, jako k obieramy równoległą do m i przechodzącą przez A, a l równoległą do niej i leżącą względem niej tak, jak m względem n – wtedy oba złożenia są tym samym przesunięciem; gdy z kolei m i n mają wspólny punkt B, bierzemy jako k prostą AB, a l przez B leżącą tak, jak m względem n – wtedy oba złożenia są tym samym obrotem.

Drugi lemat nie jest już tak oczywisty

(2) $\forall\, A, a, l\ \exists\, m, n\ (S_l = S_m S_n S_m \wedge m \in [A] \wedge n \in [a])$.



Tutaj najpierw przez A prowadzimy $a' \parallel a$ i $l' \parallel l$. Jako m bierzemy dowolną z dwusiecznych kąta $a'l'$ i przez jej przecięcie z l prowadzimy $n \parallel a$. Prosta m jest wtedy dwusieczną kąta ln. Stąd $S_l S_m$ i $S_m S_n$ realizują ten sam obrót, a równość $S_l S_m = S_n S_m$ to właśnie (2).

Mając takie lematy, nie natrafia się już na żadne trudności.

Dowolna izometria φ jest (jak to już przypomniałem) złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych, co rozpatrujemy kolejno.

$$\begin{aligned}
\varphi &= S_v S_u = S_l S_k = && \text{(na mocy (1) } k \in [A])\\
&= S_m S_n S_m S_k && \text{(na mocy (2) } m \in [A] \wedge n \in [a])\\
\varphi &= S_w S_v S_u = S_w S_p S_q = && \text{(na mocy (1) } q \in [A])\\
&= S_l S_t S_q = && \text{(na mocy (1) } t \in [A])\\
&= S_m S_n S_m S_t S_q = && \text{(na mocy (2) } m \in [A] \wedge n \in [a])\\
&= S_m S_n S_r,
\end{aligned}$$

ostatnia równość bierze się stąd, że q, t, m są współpękowe, a symetrie względem trzech prostych współpekowych zawsze można zastąpić jedną (co bez trudu można zauważyć również w argumentacji przy (1)).

Zaskakujące jest, że nadal do uzyskania izometrii zmieniających orientację potrzeba, tak jak i bez ograniczenia wyboru osi symetrii, jedynie trzech symetrii osiowych.

Takich miałem uczniów. Szkoda, że już ich nie spotkam.

Marek KORDOS