Kongruencje z królikiem

*Robert KWIECIŃSKI**

Artykuł o powyższym tytule wypada rozpocząć od przypomnienia, czym są kongruencje. Jeśli dwie liczby naturalne a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez liczbę naturalną n (innymi słowy, jeśli $a - b$ jest podzielne przez n), uczenie jest stwierdzić, że *a i b przystają do siebie modulo n* i fakt ten zanotować jako $a \equiv b \pmod{n}$. W tym kontekście znaczek „$\equiv$" (lub raczej to, co on sobą reprezentuje) nazywamy właśnie *kongruencją*.

Kongruencje mają wiele wdzięcznych własności, między innymi można je dodawać i mnożyć stronami tak jak zwykłe równania. Ich zastosowanie pozwala uprościć zawiłe nieraz rozumowania z zakresu teorii liczb. W moim artykule chciałbym skoncentrować się na problemach dotyczących początkowych cyfr liczb postaci n^k, gdzie n i k są liczbami naturalnymi. Rozpocznę od rozwiązania zadania, które skłoniło mnie do takich rozważań.

Zadanie. *Udowodnij, że dla każdej niepodzielnej przez* 10 *liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k, że pierwsza i ostatnia cyfra liczby n^k są równe.*

Rozwiązanie: Najpierw zauważmy, że dla dowolnego n mamy $n \equiv n^5 \pmod{10}$. Istotnie, niech $A = n^5 - n = n(n^2-1)(n^2+1)$. Jeśli n jest podzielne przez 5, to oczywiście 5 dzieli również A. Z drugiej strony, jeśli n nie jest podzielne przez 5, to rozpatrując wszystkie niezerowe reszty z dzielenia n przez 5, możemy się przekonać, że n^2 daje resztę 1 lub 4 z dzielenia przez 5 i w obu przypadkach 5 dzieli A. W analogiczny (a nawet prostszy) sposób pokazujemy, że A jest zawsze podzielne przez 2, skąd wnioskujemy podzielność A przez 10 i $n \equiv n^5 \pmod{10}$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Zauważmy, że jeśli będziemy mnożyć tę kongruencję obustronnie przez n^4, otrzymamy ciąg kongruencji

$$n \equiv n^5 \equiv n^9 \equiv \ldots \pmod{10}.$$

Teraz już rozważamy tylko te potęgi n, których wykładnik daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Dzięki temu ostatnia cyfra c liczby n będzie cyfrą, którą chcemy otrzymać jako pierwszą cyfrę liczby n^{4k+1} dla pewnego k. Chcemy zatem uzyskać

$$c \cdot 10^t \leqslant n^{4k+1} < (c+1)10^t, \text{ to znaczy } \frac{c}{n} \cdot 10^t \leqslant n^{4k} < \frac{c+1}{n} \cdot 10^t.$$

Po przyłożeniu do obu stron logarytmu dziesiętnego dostajemy równoważną postać

$$t + \log \frac{c}{n} \leqslant 4k \log n < t + \log \frac{c+1}{n}.$$

Dzięki zlogarytmowaniu nasz problem wygląda następująco: mamy nieskończenie długą drogę, na której co 1 mamy dziurę długości

$$\Delta = \left(\log \frac{c+1}{n} - \log \frac{c}{n}\right) = \big(\log(c+1) - \log c\big),$$

począwszy od $\log \frac{c}{n}$. Po tej nieskończonej drodze skacze królik, który rozpoczyna w 0 i robi skoki długości $4 \log n$. Chcemy pokazać, że nasz królik wpadnie kiedyś do dziury. Innymi słowy, potrzebujemy uzasadnić, że

$$\log \frac{c}{n} \leqslant \{4k \log n\} < \log \frac{c}{n} + \Delta,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x. Zauważmy najpierw, że dla różnych liczb naturalnych k, l liczby $\{4k \log n\}$ oraz $\{4l \log n\}$ są różne. W przeciwnym przypadku istniałoby takie m naturalne, że $4k \log n - 4l \log n = m$, czyli $n^{4(k-l)} = 10^m$, co przeczy założeniu o niepodzielności n przez 10. Rozważmy teraz liczby $\{4 \log n\}$, $\{8 \log n\}$, …, $\{4a \log n\}$, gdzie a to pewna liczba naturalna, która jest większa od Δ^{-1}. Skoro wypisane liczby są różne, to pewne dwie leżą w odległości mniejszej niż Δ (odległość liczb p i q należy tu rozumieć jako mniejszą z liczb $|p-q|$ oraz $1 - |p-q|$). Oznaczmy je przez $\{4x \log n\}$ oraz $\{4y \log n\}$, gdzie $x > y$. W tej sytuacji liczba $\{4(x-y) \log n\}$ leży w przedziale $(0, \Delta)$ lub $(1-\Delta, 1)$. Patrząc na ciąg $\{4(x-y)\log n\}, \{8(x-y)\log n\}, \ldots$ widzimy teraz, że dla początkowych wyrazów jest on ściśle monotoniczny i dla pewnego p naturalnego otrzymamy $\log c \leqslant \{4p(x-y)\log n\} < \log c + \Delta$. Wystarczy więc przyjąć $k = p(x-y)$, aby zakończyć rozwiązanie zadania.

*Student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Adama Mickiewicza

Rozwiązanie zadania F 919.
Intensywność opadu 20 mm na godzinę oznacza, że na 1 m^2 powierzchni spada w ciągu godziny $2 \cdot 10^{-2}$ $m^3 = 20$ l wody. Uderzenia kropel deszczu o dach są zderzeniami niesprężystymi i przekazywany przez nie dachowi pęd wynosi $v\Delta m$, gdzie Δm oznacza masę wody. Ciśnienie równa się sile działającej na jednostkę powierzchni. Mamy więc

$$p = v\frac{\Delta m}{S\Delta t} = v\rho H,$$

gdzie S oznacza powierzchnię dachu, a Δt czas, w którym na dach spadła masa wody równa Δm. Otrzymujemy $p \approx 0,056$ N/m^2. Jest to wartość bardzo mała – gdyby woda nie spływała z dachu, to już po pierwszej minucie opadu wywierałaby ciśnienie $p \approx 3{,}3$ N/m^2.

W powyższym dowodzie można wyróżnić dwie istotne części: pierwsza polega na wskazaniu podciągu potęg n, które kończą się tą samą cyfrą, a w drugiej pokazaliśmy, że dowolna cyfra może stać na początku pewnego wyrazu tego podciągu. Tę drugą część można nietrudno zmodyfikować tak, aby wykazać poniższe:

Twierdzenie 1. *Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, która nie jest potęgą dziesiątki, i dowolnego ciągu cyfr $c_1 \neq 0$, c_2, …, c_s istnieje liczba naturalna k, dla której początkowe cyfry liczby n^k to $c_1, \ldots, c_s$.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla dowolnego n możemy znaleźć k, dla którego n^k będzie się rozpoczynało, na przykład, od cyfr 100000, czyli będzie dość bliskie pewnej potędze dziesiątki. Warto zwrócić uwagę, że możemy oszacować wykładnik tej potęgi n niezależnie od n.

Twierdzenie 2. *Jeśli $n > 1$ jest liczbą naturalną niepodzielną przez 10, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją takie liczby naturalne k, l, że $10^l(1-\varepsilon) \leqslant n^k \leqslant 10^l(1+\varepsilon)$ oraz $k \leqslant \lfloor \log(1+\varepsilon)^{-1} \rfloor$.*

Dowód: Żądamy od naszego k, aby

$$10^l \cdot (1-\varepsilon) \leqslant n^k \leqslant 10^l \cdot (1+\varepsilon)$$

dla pewnego naturalnego l. Ponownie równoważnie

$$l + \log(1-\varepsilon) \leqslant k\log n \leqslant l + \log(1+\varepsilon),$$

więc

$$0 \leqslant \{k\log n\} \leqslant \log(1+\varepsilon) \text{ lub } 1 + \log(1-\varepsilon) \leqslant \{k\log n\} < 1.$$

Łatwo wykazać, że

$$1 + \log(1-\varepsilon) < 1 - \log(1+\varepsilon),$$

więc wystarczające jest, aby

$$0 \leqslant \{k\log n\} \leqslant \log(1+\varepsilon) \text{ lub } 1 - \log(1+\varepsilon) \leqslant \{k\log n\} < 1.$$

Dalej postępujemy tak jak poprzednio – kolejne liczby postaci $\{k\log n\}$ są różne, zatem wśród pierwszych $\lfloor(\log(1+\varepsilon))^{-1}\rfloor + 1$ pewne dwie znajdują się w odległości mniejszej od $\log(1+\varepsilon)$, a ich różnica jest szukaną wielokrotnością $\log n$.

Należy podkreślić, że opisana w twierdzeniu liczba k jest nie większa od $\lfloor(\log(1+\varepsilon))^{-1}\rfloor$. Na przykład, biorąc $\varepsilon = 0,1$, otrzymujemy, że dla dowolnej liczby n istnieje liczba k nie większa od 24, taka, że n można przybliżyć potęgą dziesiątki z dokładnością do 10%. Przykładową wartością n, dla której przedstawione oszacowanie jest optymalne, jest 11001. Podobny rezultat możemy, oczywiście, uzyskać, rozważając przybliżenia potęgami innych liczb naturalnych niż 10. Przykładowo, dla $p = 2$ przybliżamy n^k z dokładnością do 10% liczbą postaci 2^l i wystarczy do tego k nie większe niż 7.

Wróćmy do naszych początkowych cyfr. Wydaje się, że ciągi liczb, które nie są jakoś szczególnie zbudowane, mogą rozpoczynać się dowolnymi cyframi. Oczywiście, nie jestem w stanie udowodnić powyższego, bo cóż to są „szczególne ciągi"? Oto kolejny przykład liczb, które mogą rozpoczynać się od dowolnych cyfr:

Twierdzenie 3. *Liczby postaci k^n , gdzie n jest ustalone, mogą rozpoczynać się od dowolnego ciągu cyfr $c_1, c_2, \ldots, c_s$.*

Szkic dowodu: Jeśli k jest dość duże, to k^n i $(k+1)^n$ zbyt wiele się nie różnią (względnie), gdyż iloraz $\frac{(k+1)^n}{k^n}$ staje się dowolnie bliski 1, zatem z czasem różnica jest mniejsza niż różnica między elementami ciągu geometrycznego o dowolnie małym ilorazie większym od 1. Teraz logarytmując, otrzymamy „królika", który robi skoki o długości malejącej do 0, więc z pewnością wpadnie do naszych dziur.

Ogólniej, dowolny ciąg liczb naturalnych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, dla którego granica ciągu $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest równa 1 ma tę własność, że dowolny skończony ciąg cyfr stanowi początkowe cyfry w zapisie dziesiętnym pewnego wyrazu ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Przykładem takiego ciągu jest również ciąg kolejnych liczb pierwszych (co wynika z klasycznego, lecz wielce nieoczywistego twierdzenia o liczbach pierwszych). Zachęcam Czytelników do poszukiwania innych ciągów, których prefiksy mogą być dowolnie ustalonym ciągiem cyfr.

Rozwiązanie zadania F 920.
Dla utrzymania stałej temperatury ciała musimy w ciągu doby odprowadzić $E = P \cdot 24 \cdot 3600$ s $= 8{,}64 \cdot 10^6$ J energii. Jest to energia potrzebna do odparowania

$$\frac{E}{l} = \frac{8{,}64 \cdot 10^6 \text{ J}}{2{,}257 \cdot 10^6 \text{ J}} \text{ kg} = 3{,}83 \text{ kg}$$

wody. Gdyby jedynym mechanizmem chłodzenia była wymiana ciepła poprzez promieniowanie, to utrzymanie stałej temperatury oznaczałoby, że różnica mocy promieniowania przez odkrytą powierzchnię naszego ciała i mocy padającego na nią promieniowania cieplnego otoczenia równa jest dokładnie P. Mamy $P = \sigma S(T^4 - T_0^4)$, a zatem

$$S = \frac{P}{\sigma(T^4 - T_0^4)},$$

gdzie $T = 310$ K, a $T_0 = 295$ K, Po podstawieniu danych liczbowych mamy $S \approx 1,06$ m^2. Powierzchnia ciała człowieka dorosłego wynosi średnio niecałe 2 m^2. Uwzględnienie faktu, że współczynnik emisji skóry jest mniejszy od 1, zwiększyłoby obliczoną wartość S. Jak z tego widać, w normalnych warunkach pocenie, promieniowanie oraz konwekcja i przewodnictwo cieplne odgrywają istotną rolę.