Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2017

Zadania z fizyki nr 630, 631

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

630. Samolot leci z prędkością u po prostej poziomej, przechodzącej nad głową obserwatora. W pewnej chwili obserwator widzi samolot w kierunku, który tworzy z pionem kąt φ. Jaki kąt z pionem tworzy w tej samej chwili kierunek, wzdłuż którego dociera do obserwatora dźwięk silnika samolotu? Prędkość dźwięku wynosi v. Rozważ przypadki $u < v$ oraz $u > v$.

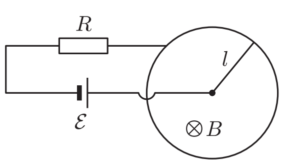
631. Na powierzchni poziomej znajdują się dwa jednakowe, cienkościenne walce o masie m każdy. Osie walców są równoległe, promienie są równe R. Na początku jeden z walców spoczywa, a drugi toczy się bez poślizgu w kierunku pierwszego z prędkością ruchu postępowego v_0 aż do centralnego, sprężystego zderzenia. Współczynnik tarcia kinetycznego walców o podłoże jest równy μ, tarcie między walcami jest zaniedbywalne. Znaleźć maksymalną odległość między walcami po zderzeniu.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2016

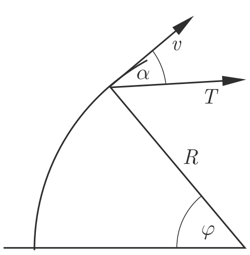
Przypominamy treść zadań:

622. Motocyklista porusza się po torze w kształcie okręgu. Ruszając z miejsca, chce jak najszybciej osiągnąć maksymalną prędkość. Jaką część okręgu przebędzie zanim osiągnie ten cel?

623. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1, metalowy pręt może obracać się wokół środka metalowego pierścienia o promieniu l. Drugim końcem dotyka pierścienia. Siła tarcia w ruchomym kontakcie wynosi F. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B jest prostopadłe do powierzchni pierścienia. Siła elektromotoryczna ogniwa wynosi ε, opór obwodu jest równy R. Znaleźć ustaloną prędkość pręta i natężenie prądu w obwodzie.



Rys. 1



Rys. 2

622. Podczas rozpędzania motocyklista musi optymalnie wykorzystać siłę tarcia. Oznaczmy przez α kąt między prędkością v i maksymalną siłą tarcia T (rys. 2) w pewnej chwili podczas rozpędzania. Równania ruchu motocyklisty w kierunku stycznym i prostopadłym do toru mają postać: $m\frac{dv}{dt} = T\cos\alpha$ oraz $\frac{mv^2}{R} = T\sin\alpha$. Różniczkując względem czasu drugie równanie i uwzględniając pierwsze, otrzymujemy:

$$\frac{2mv}{R}\frac{dv}{dt} = T\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{2v}{R} = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Prędkość kątowa motocyklisty w rozważanej chwili dana jest wzorem $\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\varphi}{dt}$, stąd $2\varphi = \alpha + \mathrm{const}$. W chwili początkowej $\varphi = 0$ i $\alpha = 0$, zatem $\mathrm{const} = 0$. Gdy motocyklista osiąga maksymalną prędkość, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, co odpowiada $\frac{1}{8}$ okręgu.

623. Gdy pręt obraca się z prędkością kątową ω, w wyniku zmiany strumienia pola magnetycznego Φ_B przez powierzchnię obwodu powstaje siła elektromotoryczna indukcji, której wartość wynosi

$$\varepsilon_{\mathrm{ind}} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\pi l^2 B}{T} = Bl^2\omega/2.$$

Natężenie prądu w obwodzie dane jest wzorem $I = \big(\varepsilon - Bl^2\omega/2\big)/R$. Warunek równowagi momentów sił działających na obracający się ze stałą prędkością kątową pręt ma postać $BIl^2/2 = Fl$, stąd $I = 2F/(Bl)$. Z porównania wzorów na natężenie prądu otrzymujemy ustaloną prędkość kątową pręta:

$$\omega = \frac{2\,(Bl\varepsilon - 2RF)}{B^2l^3}.$$

Zadania z matematyki nr 733, 734

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2017

733. Wierzchołek czworościanu nazwijmy *ciekawym*, jeśli z trzech wychodzących zeń krawędzi nie da się zbudować trójkąta.
(a) Czy istnieje czworościan, którego wszystkie wierzchołki są ciekawe?
(b) Czy istnieje czworościan, mający dokładnie jeden ciekawy wierzchołek?

734. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $p, q, a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} a_{k+1}^{-q} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{p} \quad \text{(przyjmujemy } a_{n+1} = a_1\text{)}.$$

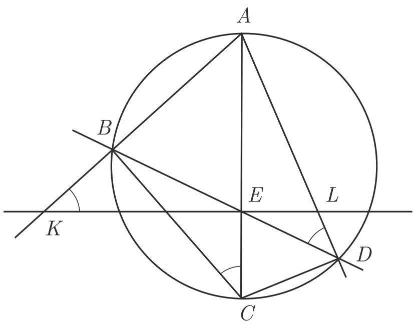
Zadanie 734 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2016

Przypominamy treść zadań:

725. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Przekątne przecinają się w punkcie E. Prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt E, przecina proste AB i AD w punktach K i L. Wykazać, że punkty B, D, K, L leżą na jednym okręgu.

726. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że istnieje nieujemna liczba całkowita m taka, że $2m \leqslant n$ oraz różnica $2^n - 2^m$ dzieli się przez n.



725. Gdy przekątne są prostopadłe, punkty K i L pokrywają się z B i D, i nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy dalej, nie tracąc ogólności, że kąt AEB jest ostry (wtedy punkt B leży między A i K, zaś L leży między A i D). Czworokąt $ABCD$ ma okrąg opisany (o średnicy AC). Stąd oraz z zależności w trójkątach prostokątnych ABC i AEK dostajemy ciąg równości

$$|\sphericalangle LDE| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ - |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BKE|.$$

Z ostatniej równości wynika położenie punktów B, D, K, L na wspólnym okręgu.

726. Zapiszmy liczbę n w postaci $n = 2^k q$ ($k \geqslant 0$, $q \geqslant 1$ całkowite, q nieparzyste). Znajdujemy wykładnik δ, dla którego

$$2^\delta \equiv 1 \pmod{q}. \tag{1}$$

Jeśli pewien wykładnik spełnia ten warunek, to jego dwukrotność też. Można więc wybrać δ tak, by

$$\frac{q}{2} < \delta \leqslant q - 1. \tag{2}$$

Liczbę m, o jaką pyta zadanie, spróbujemy znaleźć wśród liczb postaci $n - j\delta$ ($j \geqslant 0$ całkowite). Dla $m = n - j\delta$ różnica

$$2^n - 2^m = 2^{n-j\delta}(2^{j\delta} - 1)$$

będzie podzielna przez $n = 2^k q$, jeśli tylko $k \leqslant n - j\delta$, bowiem czynnik w nawiasie dzieli się przez q (por. (1)). Biorąc jeszcze pod uwagę wymaganie, by $m \leqslant n/2$, widzimy, że wystarczy znaleźć liczbę j spełniającą nierówność

$$\frac{n}{2} \leqslant j\delta \leqslant n - k; \tag{3}$$

wówczas liczba $m = n - j\delta$ spełni wszystkie żądane warunki.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, czyli gdy $k = 0$, $q = n$, można wziąć $j = 1$ (por. (2)).

Gdy n jest liczbą parzystą (więc $k \geqslant 1$), warunki (3) postulują istnienie wielokrotności liczby δ w przedziale $[n/2, n-k]$. Do tego wystarcza, by δ nie przekraczała wartości $n/2 - k + 1$ (bo tyle jest liczb całkowitych w tym przedziale); a dzięki oszacowaniu (2) wystarczy, by zachodziła nierówność

$$q - 1 \leqslant \frac{n}{2} - k + 1,$$

czyli (równoważnie)

$$(2^{k-1} - 1)q \geqslant k - 2.$$

To kończy rozwiązanie, bowiem ostatnia nierówność jest słuszna dla każdej pary liczb całkowitych $k, q \geqslant 1$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 723 ($WT = 1{,}33$) i 724 ($WT = 2{,}12$) z numeru 6/2016

Piotr Kumor	Olsztyn	45,36
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,11
Witold Bednarek	Łódź	38,72
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,76
Marek Gałecki	USA	37,76
Roksana Słowik	Knurów	36,41

Uczestnicy ligi, przekraczający barierę *44 p.* prawie równocześnie – tak się ciekawie złożyło – toż to sama elita Klubu 44M! Przypomnijmy sobie nazwiska z poprzednich dwóch miesięcy i popatrzmy na bieżącą tabelę: Piotr Kumor po raz trzynasty (!); a tuż za nim ligowcy, którzy też (jak widać) miną linię mety lada chwila, po raz któryś-tam z rzędu...