mała delta

Dywany Antoniego – nie tylko bajka o pewnych zastosowaniach ciągu Fibonacciego

Dawno, dawno temu, za drugą górą, za trzecią rzeką żył sobie królewicz Leonardo pochodzący ze szlachetnego rodu Fibonaccich. No, może nie całkiem królewicz, ale piąty syn dyplomaty włoskiego. Może nie całkiem za trzecią rzeką, bo urodził się za ósmą doliną i trzynastoma bagnami, dokładniej w Pizie w 1175 roku. Zatem przynajmniej rzeczywiście żył dawno, dawno temu. Choć w pewnym sensie żyje do dzisiaj w swoich uczniach, bowiem wieść o liczbach Fibonacciego rozeszła się po świecie i szumi o nich niejeden las. Ciągu Fibonacciego użyto, na przykład, do opisu tempa rozmnażania się królików, układu liści i nasion na roślinach wszelkich. Znaleziono go też w trójkącie Pascala. Ciąg ten ukrywa się w zjawiskach ekonomicznych, meteorologicznych, wykorzystywany jest w muzyce i w sztuce. Jego wielbiciele znaleźli także wiele ciekawych zależności między wyrazami tego ciągu.

Ciekawe prezentacje dotyczące ciągu Fibonacciego są udostępniane przez Khan Academy – cykl: *Spirals, Fibonacci and being a plant*, gdzie nie tylko pokazane jest występowanie ciągu w przyrodzie, na przykład w układzie liści wokół łodygi, ale przy okazji wyjaśniona jest metodologia badań przyrodniczych.

Ta opowieść będzie jednak o czymś nowym. Mistrz Antoni, wierny uczeń prawiekrólewicza Leonarda, opowie Wam, jak używając ciągu Fibonacciego, tkać dywany i nie tylko. Zatem posłuchajcie.

Konstrukcja ciągu Fibonacciego: $f_1 = 1, f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dla $n > 2$.

Podstawowy ciąg Fibonacciego buduje się w ten sposób, że jego kolejny wyraz jest sumą dwóch wcześniejszych wyrazów, a pierwszymi ustalonymi wyrazami ciągu są 1 i 1. Dopisując kolejne liczby, otrzymamy bardzo długą, nieskończenie długą nić. Każdą liczbę, która pojawia się w tak skonstruowanym ciągu, nazywamy *liczbą Fibonacciego.*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

8	8	16	24	40	64
5	5	10	15	25	40
3	3	6	9	15	24
2	2	4	6	10	16
1	1	2	3	5	8
1	1	2	3	5	8

Rys. 1

Do pracy! Dywan Antoniego tka się, zaczynając od czterech jedynek ułożonych w kwadrat. Na początek wypełnijmy pierwsze dwie kolumny (nici), używając zasady konstrukcji ciągu Fibonacciego (tworzymy ciąg w górę od początkowych jedynek). Następnie tkajmy w prawo od otrzymanych kolumn. Dwie najniższe nici to po prostu ciągi Fibonacciego, wyższe tworzone tą samą zasadą, będą miały nowe kolory (początkowe wyrazy nie są jedynkami, rysunek 1). Tkając i tkając, otrzymamy kawał nieskończonego dywanu.

– *A teraz powiedzcie mi, dzieci, czy byłyście grzeczne? Zjadłyście dzisiaj śniadanie przed wyjściem do szkoły? I żadnych drożdżówek?* – zapytał sam królewicz Leonardo. – *Tak? To słuchajcie dalej mojego ucznia Antoniego.*

Przyjrzyjmy się bliżej naszemu tkackiemu warsztatowi.

1. Spójrzmy na przekątną naszego dywanu. Cóż to? Liczby na przekątnej są kwadratami liczb Fibonacciego. Tak jest nie tylko dla widocznej części dywanu, ale dla każdej liczby znajdującej się na przekątnej.

$$1 = 1^2, \quad 4 = 2^2, \quad 9 = 3^2, \quad 25 = 5^2, \quad 64 = 8^2, \quad 169 = 13^2, \quad 441 = 21^2$$

…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
144	144	288	432	720	1152	1872	3024	4896	7920	12816	20736	…
89	89	178	267	445	712	1157	1869	3026	4895	7921	12816	…
55	55	110	165	275	440	715	1155	1870	3025	4895	7920	…
34	34	68	102	170	272	442	714	1156	1870	3026	4896	…
21	21	42	63	105	168	273	441	714	1155	1869	3024	…
13	13	26	39	65	104	169	273	442	715	1157	1872	…
8	8	16	24	40	64	104	168	272	440	712	1152	…
5	5	10	15	25	40	65	105	170	275	445	720	…
3	3	6	9	15	24	39	63	102	165	267	432	…
2	2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	288	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…

Rys. 2

2. Zerknijmy na nieco przesunięte przekątne (rysunek 2) rozpoczynające się od wartości 1 i 2.

$$1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, 1870, \ldots$$

W tym ciągu różnice między kolejnymi wyrazami są kwadratami kolejnych liczb Fibonacciego.

$$2 - 1 = 1 = 1^2, \quad 6 - 2 = 4 = 2^2,$$
$$15 - 6 = 9 = 3^2, \quad 40 - 15 = 25 = 5^2.$$

3. Weźmy pod lupę dowolny kwadrat dywanu złożony z czterech komórek. Okazuje się, że iloczyny elementów umieszczonych w przeciwległych narożnikach takiego kwadratu są równe. Co więcej, elementy w prawym górnym rogu i lewym dolnym rogu takiego kwadratu sumują się do liczby Fibonacciego. Jeszcze więcej? Jeżeli weźmiemy kwadrat dowolnej wielkości, to iloczyny elementów umieszczonych w wierzchołkach po skosie również są równe.

– Mistrzu Antoni, czy mógłbyś wyjawić nam tajemnicę Twoich dywanów? Skąd biorą się te wszystkie zależności, które nam wyjawiłeś?

– Z przyjemnością – odpowiedział Mistrz i kontynuował: *– Otóż zauważcie, moje dzieci, że nasz dywan jest wielką tabliczką mnożenia liczb Fibonacciego. Dowolna komórka w dywanie, znajdująca się w i-tej kolumnie i j-tym wierszu, to nic innego niż iloczyn najniższego elementu w kolumnie (liczby Fibonacciego f_i) i wartości znajdującej się najbardziej w lewo w wierszu komórki (liczby f_j). W związku z tym na przekątnej znajdują się kwadraty liczb Fibonacciego, tak jak na przekątnej w zwyczajnej tabliczce mnożenia znajdują się kwadraty kolejnych liczb naturalnych.*

– Przecież zwykła tabliczka mnożenia, to taki dywan tylko utkany nieco innym ściegiem … – zamyślił się jeden z uczniów.

Teraz przyjrzyjmy się kwadratom i zależności iloczynów elementów leżących w narożnikach.

Wybierzmy dowolny kwadrat, a jego narożniki oznaczmy przez $f_{l,m}, f_{l,n}, f_{k,m}, f_{k,n}$, gdzie $f_{i,j}$ oznacza element znajdujący się w kolumnie i oraz wierszu j. Cztery komórki kwadratu można opisać w następujący sposób:

$$f_{l,m} = f_l \cdot f_m, \quad f_{l,n} = f_l \cdot f_n, \quad f_{k,m} = f_k \cdot f_m, \quad f_{k,n} = f_k \cdot f_n.$$

Teraz równości zachodzące w kwadracie można ująć następująco

$$f_{l,m} \cdot f_{k,n} = f_l \cdot f_m \cdot f_k \cdot f_n \quad \text{oraz} \quad f_{l,n} \cdot f_{k,m} = f_l \cdot f_n \cdot f_k \cdot f_m,$$

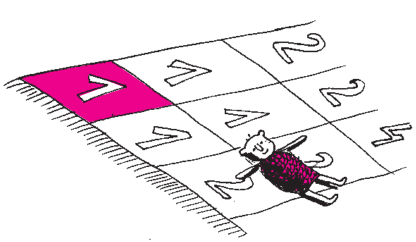
czyli

$$f_{l,m} \cdot f_{k,n} = f_{l,n} \cdot f_{k,m}.$$

Zauważmy, że warunki, które spełniają cztery komórki dowolnego kwadratu, będą spełniać narożniki kwadratu dowolnej wielkości, a nawet dowolnego prostokąta!

W dywanie można doszukać się mnóstwa innych kolorowych ściegów:

4. $f_{1,1} + f_{2,2} + \cdots + f_{n,n} = f_n \cdot f_{n+1}$
5. $f_{1,3} + f_{2,4} + f_{3,5} + \cdots + f_{n,n+2} = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$, dla n nieparzystych
6. $f_{n+1,n+1} - f_{n-1,n-1} = f_{2n}$



– Skoro już zdradziłem parę dywanowych sekretów, nie pozostaje mi nic innego, jak wskazać Wam kierunki poszukiwań nowych ściegów. Będziemy tkali i szukali nowych kolorów, ale to jutro, bo dzisiaj jestem już zmęczony – dodał Mistrz Antoni.

Małą Deltę przygotował Antoni DŁUGOSZ
uczeń szkoły podstawowej nr 32 im. Karola Chodkiewicza, Kraków