

Dowody i obliczenia

Witold SADOWSKI*



Kilka miesięcy temu Marek Kordos zasugerował, że skoro napisałem już w *Delcie* 12/2014 o tym, czego o równaniu Naviera–Stokesa nie wiadomo, to może napisałbym też artykuł o tym, co z tym równaniem da się zrobić. Tak sformułowana oferta brzmi trochę jak „propozycja nie do odrzucenia”, więc nieopatrznie obiecałem taki artykuł dostarczyć. Piszę „nieopatrznie”, bo w momencie podjęcia zobowiązania nie uściśliliśmy, co powinienem rozumieć przez stwierdzenie *da się zrobić*. Czy chodzi o to, co da się udowodnić? Czy raczej o to, co daje się obliczyć?

Ponieważ są to do pewnego stopnia różne kwestie, więc na początek wyjaśnię, że w poniższym artykule poruszać się będziemy głównie w tym obszarze matematyki stosowanej, który zainteresowany jest dowodami. Zobaczymy jednak przy okazji, jak obie te kwestie są ze sobą splecione i jak dowody naprawdę ciekawych twierdzeń prowadzić mogą do odkryć w świecie fizycznym i – w konsekwencji – do tego, co da się obliczyć. Na całą rzecz spojrzymy zresztą z nieco szerszej perspektywy.

O co chodzi w matematyce stosowanej?

Idealne zastosowanie matematyki to takie, gdy rozumowanie matematyczne dostarcza bezpośredniej i – co również ważne – prawdziwej odpowiedzi na pytania interesujące ludzi, którzy matematykami nie są. Przykładami takich pytań mogą być: „czy w sobotę będzie padać, bo nie wiem, czy spakować kurtkę?”, „pod jakim kątem wystrzelić pocisk, by poleciał jak najdalej?”, „co ile godzin i w jakich dawkach najlepiej jest podawać lek X, by pacjent najszybciej wyzdrowiał?” itp. Jak widzimy, są to pytania, które w zasadzie nie używają żadnej specjalistycznej terminologii matematycznej. Dlatego pierwszym zadaniem matematyka jest przetłumaczenie tego rodzaju pytań na kwestie czysto matematyczne. Drugi krok to przeprowadzenie matematycznych rozumowań, które albo od razu (tzn. po tłumaczeniu z powrotem na język codzienny) doprowadzą do odpowiedzi na postawione pytania wyjściowe, lub też wskażą ścisły algorytm obliczeń, który też ostatecznie takiej odpowiedzi udzieli.

Istnieje jednak jeszcze trzeci, być może najciekawszy, krok w modelowaniu matematycznym. Mianowicie, po sformułowaniu matematycznej wersji problemu, kierując się już tylko matematyczną intuicją, można postawić szereg pytań dotyczących pojawiających się w tym sformułowaniu obiektów matematycznych i zbadać ich właściwości. Odpowiedzi na takie pytania całkiem często dają się przetłumaczyć na zaskakujące twierdzenia dotyczące świata fizycznego.

Przykład optymistyczny: równanie Laplace’a

Zanim zajmiemy się równaniem Naviera–Stokesa, którego teoria to mniej więcej „półtora kroku” opisanego powyżej, przyjrzyjmy się najpierw nieco innemu problemowi, który w pewnym sensie idealnie obrazuje naszkicowaną metodę.

Problem praktyczny, który nas teraz interesuje, jest następujący: wyobraźmy sobie, że w pewnym przedmiocie wykonanym z jednorodnego materiału ustabilizowała się temperatura i możemy dokonywać jej pomiarów w dowolnym punkcie na powierzchni tego przedmiotu. Czy można na podstawie pomiaru temperatury na powierzchni przedmiotu przewidzieć, jaka jest temperatura w dowolnym punkcie jego wnętrza?

Matematycznie problem ten można wysłowić następująco: niech Ω będzie ograniczonym obszarem w przestrzeni (odpowiada to, oczywiście,

*University of Bristol

przedmiotowi, w którym temperatura jest ustabilizowana i nie zmienia się w czasie). Naszym zadaniem jest znaleźć pewną funkcję T określoną na Ω (czyli temperaturę), wiedząc tylko, że

- $T = g$ na powierzchni Ω , gdzie g to jakaś znana nam dodatnia funkcja ciągła;
- we wnętrzu Ω funkcja T spełnia pewne równanie, zwane równaniem Laplace'a (znajomość tego równania nie jest potrzebna do zrozumienia treści artykułu).

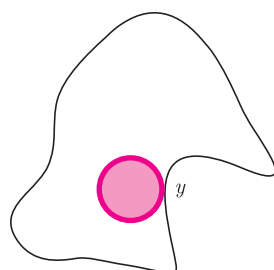
Okazuje się, że tak postawiony problem zawsze daje się rozwiązać i to dokładnie na jeden sposób. Dowodzi się tego w sposób ścisły, co więcej – podaje się metodę (metoda Perrona), a dla niektórych obszarów Ω także konkretny wzór (wzór Greena), jakich można użyć do znalezienia funkcji T (której ciągłości i gładkości we wnętrzu Ω można dowiedzieć). Teoria prowadzi zatem do przepisu na obliczenia interesujące *zwykłego człowieka* (raczej fizyka lub inżyniera, ale nie wchodźmy w szczegóły). W ten sposób dwa kroki modelowania matematycznego zostały wykonane. A jak jest w tym przypadku z krokiem trzecim? Okazuje się, że funkcja T jest niezwykle ciekawa i można udowodnić jej następującą piękną własność.

Własność wartości średniej. Średnia temperatura na dowolnej sferze we wnętrzu Ω jest równa temperaturze w środku tej sfery.

Z twierdzenia o wartości średniej możemy szybko wywnioskować, że także średnia temperatura w dowolnej kuli we wnętrzu Ω jest dokładnie równa temperaturze w środku tej kuli (dowód opiera się na obserwacji, że kula jest sumą sfer). W oparciu o własność wartości średniej możemy teraz *udowodniać* własności rozwiązania równania Laplace'a, pomimo tego, że nie zakładamy tu żadnej znajomości pochodnych cząstkowych. Zaczijmy od faktu, który z fizycznego punktu widzenia raczej nie jest zaskakujący.

Zasada maksimum. Zarówno najwyższa, jak i najniższa temperatura w całym Ω osiągnęte są na powierzchni Ω .

Naszkićmy główną ideę dowodu: niech M będzie najwyższą wartością T na zbiorze Ω . Przypuśćmy, że w jakimś punkcie $x \in \Omega$ mamy $T(x) = M$. Weźmy kulę o środku w x , która dotyka brzegu Ω w punkcie y , ale nigdzie nie wychodzi poza Ω (rys. 1).



Rys. 1

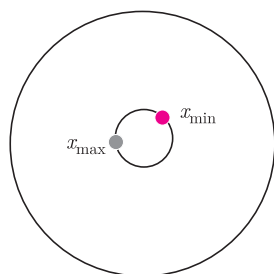
Gdyby w jakimkolwiek punkcie tej kuli wartość T była ostro mniejsza od M , to mielibyśmy sprzeczność z własnością wartości średniej, bo średnia względem tej kuli musiałaby być wtedy mniejsza niż M (nigdzie nie da się nadrobić straty, bo temperatura nigdzie nie przekracza M). A zatem w całej kuli mamy wartość T równą M , w szczególności jest tak w punkcie y należącym do brzegu.

Oczywiście, można tu wrzucić ramionami i powiedzieć, że to wiedzieliśmy i bez dowodu, po prostu z doświadczenia. Udowodnimy zatem jeszcze inną własność funkcji T , własność raczej nieoczywistą. Rozpatrzmy w tym celu (trójwymiarową) kulę $B(0, 5)$ (o promieniu 5 i środku w zerze), w której ustaliliśmy stacjonarny rozkład temperatury T , przy czym na brzegu kuli $B(0, 5)$ mamy równość $T = g$ dla pewnej ciągłej i dodatniej funkcji g . Ponieważ funkcję g możemy ustalić dowolnie (byle tylko była dodatnia), więc na powierzchni kuli $B(0, 5)$ stosunek temperatury największej do najmniejszej może być dowolnie wielki, równy, powiedzmy, miliard bilionów. Udowodnimy jednak, że w kuli $B(0, 1)$ stosunek temperatury największej do najmniejszej nigdy nie przekracza liczby 8.

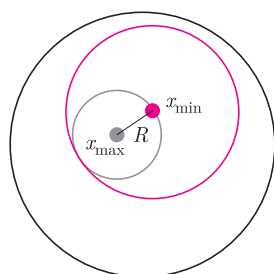
A oto dowód. Przypuśćmy że największa temperatura w kuli $B(0, 1)$ jest w punkcie x_{\max} , a najmniejsza w punkcie x_{\min} (rys. 2). Ponieważ oba te punkty leżą w kuli $B(0, 1)$, więc odległość R między nimi nie jest większa niż 2.

Z twierdzenia o wartości średniej możemy zatem wywnioskować, że (rys. 3)

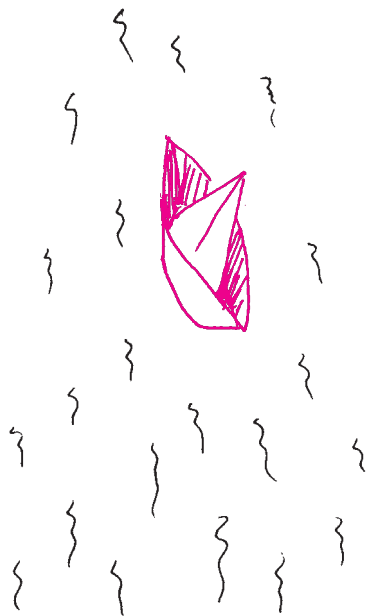
$$T(x_{\max}) = \text{średnia } T \text{ w kuli } B(x_{\max}, R)$$



Rys. 2



Rys. 3



oraz

$$T(x_{\min}) = \text{średnia } T \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R),$$

bo obie z kul, względem których bierzemy średnie, nie wystają poza $B(0, 5)$.

Niech teraz \tilde{T} będzie funkcją równą T w kuli $B(x_{\max}, R)$ i równą zeru w każdym innym punkcie. Ponieważ funkcja T jest dodatnia, więc wszędzie mamy $\tilde{T} \leq T$ i w konsekwencji

$$T(x_{\min}) = \text{średnia } T \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R) \geq \text{średnia } \tilde{T} \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R).$$

W dodatku kula $B(x_{\max}, R)$ stanowi $1/2^3$ objętości kuli $B(x_{\min}, 2R)$, a zbiór $B(x_{\min}, 2R) \setminus B(x_{\max}, R)$ nie wnosi nic ani na plus, ani na minus do średniej \tilde{T} , więc mamy także

$$\text{średnia } \tilde{T} \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R) = \frac{\text{średnia } T \text{ w } B(x_{\max}, R)}{2^3} = \frac{1}{8}T(x_{\max}).$$

Nasze twierdzenie jest więc udowodnione. Czytelnik Dociekliwy może spróbować zmodyfikować powyższy dowód tak, by wykazać, że także w kuli $B(0, 4)$ stosunek największej wartości T do najmniejszej nie przekracza pewnej (innej, oczywiście, niż 8) stałej. Wynik ten łatwo już będzie uogólnić w następujący sposób.

Nierówność Harnacka. Niech T będzie rozwiązaniem równania Laplace'a w obszarze Ω z dowolnym dodatnim warunkiem brzegowym g . Dla każdego podzbioru $V \subset \Omega$ oddalonego od brzegu Ω o $r > 0$ istnieje taka stała C , że

$$\sup_{x \in V} T(x) \leq C \inf_{x \in V} T(x).$$

Otrzymaliśmy zatem ścisły matematyczny wynik, uzyskany za pomocą elementarnego rozumowania, który jest jednocześnie sprawdzalną hipotezą doświadczalną. Jest to zatem klasyczny przykład tego, jak powinno funkcjonować modelowane matematyczne.

Równanie Naviera–Stokesa: dwa wymiary

Pytanie wyjściowe dla równania Naviera–Stokesa brzmi: „W pewnym ograniczonym obszarze płynie sobie płyn. Wiem (lub mogę wiedzieć) wszystko o tym przepływie w jednej ustalonej chwili. Na podstawie tej informacji chcę wiedzieć wszystko o tym przepływie w przyszłości”.

Po przetłumaczeniu pytania wyjściowego na język matematyki dostajemy następujący problem: w obszarze Ω dane jest pole wektorowe u_0 , odpowiadające prędkości płynu w ustalonej chwili początkowej. (Pole wektorowe to funkcja, której wartościami są wektory, co oznacza po prostu, że w każdym punkcie Ω zaczepiony jest wektor). Szukam zmieniającego się w czasie (gładkiego) pola wektorowego u o następujących własnościach:

- dla wszystkich t pole wektorowe $u(t)$ znika na brzegu Ω ;
- pole $u(t)$ zmienia się w czasie zgodnie z równaniem Naviera–Stokesa (czyli z grubsza biorąc, z drugą zasadą dynamiki Newtona);
- w chwili $t = 0$ mamy $u(0) = u_0$, gdzie u_0 to pewne gładkie pole wektorowe (odpowiadające polu prędkości nieściśliwej cieczy w chwili początkowej).

Po wykonaniu pierwszego kroku modelowania chcielibyśmy teraz wykonać krok drugi, a może i trzeci. Niestety, tak dobrze jest tylko w dwóch wymiarach. Okazuje się bowiem, że jeśli przepływ wody odbywa się w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tzn. gdy wektor prędkości ma tylko dwie składowe $u = (u_1, u_2)$, to równanie Naviera–Stokesa jednoznacznie wyznacza wszystkie przyszłe pola prędkości na podstawie stanu obecnego. Fakt ten dowodzi się formalnie, co otwiera drogę do tego, by przyszłe pola prędkości obliczać numerycznie – są na to standardowe metody. Obliczenia te mają sens, bo są jednoznaczne i możliwe do przeprowadzenia dla dowolnie dużych czasów $t > 0$. Dwa podstawowe kroki modelowania matematycznego są zatem w dwóch wymiarach wykonane. A jak jest z krokiem trzecim? Czy potrafimy stawiać hipotezy o rzeczywistości na podstawie czysto teoretycznych rozważań? W pewnym sensie tak. Spójrzmy bowiem na kolejne twierdzenie.



Rozwiązanie zadania M 1516.

Niech M będzie takim punktem, że czworokąt $AKLM$ jest równoległobokiem. Wówczas

$$LM = AK = CL,$$

$$BL = BC - CL = AC - AK = CK$$

oraz

$$\sphericalangle BLM = \sphericalangle KCL,$$

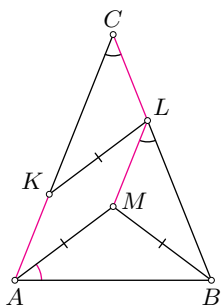
a zatem trójkąty BLM oraz KCL są przystające (cecha bok-kąt-bok). Zatem $BM = KL = AM$, czyli trójkąt ABM jest równoramienny, więc

$$\cos \sphericalangle BAM = \frac{\frac{1}{2}AB}{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{KL} = \frac{k}{2}.$$

Pozostaje zauważyć, że proste AM i KL są równoległe, więc

$$\sphericalangle BAM = \arccos(k/2)$$

jest szukanym kątem.



Twierdzenie o atraktorze. Po upływie dostatecznie dużego czasu $t > 0$ pole prędkości $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ daje się wyznaczyć z dowolnie małym błędem na podstawie pomiaru w skończonej liczbie punktów.

Aby nieco lepiej zrozumieć to stwierdzenie, rozważmy prostszą, ale podobną sytuację. Niech f_n będzie ciągiem funkcji gładkich na odcinku $[0, 1]$. Jeśli wiemy, że trzecia pochodna funkcji f_n dąży (jednostajnie) do zera, to wykres f_n musi upodabniać się do paraboli (co wynika ze wzoru Taylora). Funkcje f_n są zatem dla dużych n świetnie przybliżane przez funkcje liniowe lub kwadratowe, te zaś wyznaczane są przez ich wartości w trzech różnych punktach.

W przypadku dwuwymiarowego równania Naviera–Stokesa sytuacja jest w pewnym sensie podobna. Istnieje bowiem zbiór \mathcal{A} zwany atraktorem, którego elementami są pola prędkości, które dają się jednoznacznie wyznaczyć przez ich wartości w N różnych punktach. Wysłowione wyżej twierdzenie mówi jednak, że z upływem czasu pola prędkości dowolnego przepływu (z ustaloną regularną siłą zewnętrzną) w każdej chwili wyglądają niezwykle podobnie do któregoś elementu zbioru \mathcal{A} .

Trzy wymiary

Rozpatrywać będziemy tylko sytuację, gdy nie ma sił zewnętrznych. Jeśli pole wektorowe ma trzy składowe $u = (u_1, u_2, u_3)$ (tzn. przepływ ma miejsce w trójwymiarowej przestrzeni), to wiadomo tylko, że przyszłe pola prędkości przewidywane są jednoznacznie, gdy w chwili początkowej prędkość nie zmienia się zbyt gwałtownie lub ma pewne symetrie. Co jednak dzieje się w przypadku, gdy żadnych symetrii nie ma, początkowe pole prędkości pełne jest gwałtownych wirów, a my mamy numerycznie obliczać przyszłe pola prędkości? W tej sytuacji czysta teoria nic nam (przynajmniej na razie) nie pomoże, mogłoby się więc wydawać, że po uzyskaniu wyniku pozostaniemy niepewni, czy nasze obliczenia są prawidłowe, tzn. czy przyszłe przepływy dają się wyznaczyć na tylko jeden uzyskany przez nas sposób, czy też można dojść do zupełnie odmiennych wyników, stosując np. nieco inną metodę numeryczną. Zupełnie zdumiewający wynik (Chernyshenko, Constantin, Robinson, Titi, 2006) mówi jednak, że nawet, gdy zawodzi nas teoria, to same obliczenia numeryczne mogą nam dać pewność, że są jednoznaczne i prawidłowe! Nie sposób wdawać się tu w szczegóły, ale przedstawmy pokrótce ogólną ideę tego rezultatu. Otóż jeśli w obliczeniach numerycznych przybliżymy początkowy przepływ i siły działające na płyn z błędem wystarczająco małym, a jednocześnie otrzymane rozwiązanie numeryczne będzie miało wystarczająco niski poziom oscylacji (co to znaczy w tym kontekście *poziom oscylacji*, trzeba oczywiście, odpowiednio zdefiniować – to są właśnie techniczne szczegóły), to możemy być pewni, że nasze obliczenia są poprawne.

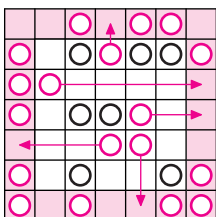
Sytuacja ta jest w pewnym sensie paradoksalna. Z jednej strony obecna teoria trójwymiarowego równania Naviera–Stokesa jest zbyt słaba, by zapewnić nas o poprawności obliczeń numerycznych przeprowadzanych dla dowolnych (ale sensownych) początkowych pól prędkości. Z drugiej strony dla wszystkich danych początkowych, dla których podstawowy model hydrodynamiki zachowuje się poprawnie, możemy udowodnić poprawność obliczeń na podstawie nich samych, o ile tylko są one wystarczająco dokładne.

Opisany wyżej wynik stanowi dość zaskakujący kontekst do pytania postawionego na wstępie i do wzajemnej zależności pomiędzy dowodami a obliczeniami. Otóż o trójwymiarowym równaniu Naviera–Stokesa *można udowodnić*, że w każdej sytuacji, w której produkuje ono jednoznaczny wynik, *można wykonać przybliżone obliczenia* tak dokładnie, że jednoznaczność przybliżanego rozwiązania będziemy mogli *ściśle udowodnić*, wykorzystując w tym celu własności właśnie *obliczonych* rozwiązań. . .



Rozwiązanie zadania M 1517.

Każde z 24 pól przyległych do krawędzi szachownicy nazwijmy *brzegowym*. Zauważmy, że każdej wieży, która nie jest otoczona, możemy przyporządkować pewne pole brzegowe w następujący sposób. Jeżeli wieża stoi na polu brzegowym, to przyporządkowujemy jej to pole, na którym stoi; jeżeli zaś nie stoi na polu brzegowym, to przyporządkowujemy jej jedno z tych pól brzegowych, które są w jej zasięgu (skoro wieża nie jest otoczona, to takie pole jest co najmniej jedno).



Pozostaje zauważyć, że żadne pole brzegowe nie mogło zostać przyporządkowane więcej niż jednej wieży, a zatem wież, które nie są otoczone, jest co najwyżej 24. Wobec tego pośród dowolnych co najmniej 25 wież stojących na szachownicy jest co najmniej jedna wieża otoczona.