

Jak zatem zamieniać mile na kilometry? Wystarczy znaleźć reprezentację Zeckendorfa danej liczby mil, a następnie zsumować liczby Fibonacciego o numerach o 1 wyższych. Przykładowo, jedziemy w Stanach Zjednoczonych samochodem i widzimy ograniczenie do 55 mil/h. Uśmiechamy się tylko, bo 55 to przypadkowo dziesiąta liczba Fibonacciego, więc tylko przeskakujemy do jedenastej, czyli 89 km/h. W rzeczywistości powinno wyjść 88,514, zatem błąd 0,486 to niespełna pół kilometra na godzinę. Idźmy dalej: inne częste ograniczenie 45 mil/h. Tym razem w pamięci rozkładamy 45 jako  $34 + 8 + 3$  i przesuujemy indeksy z 34, robiąc 55, z 8 robiąc 13, a z 3 robiąc 5. Razem  $55 + 13 + 5 = 73$  km/h. Tym razem błąd nieco większy: powinno wyjść 72,420, czyli dostaliśmy o 0,580 za dużo. Ale cały czas mieścimy się w granicach poniżej jedynek. Jak się okazuje, dla wszystkich liczb aż do 58 mil nie zrobimy błędu przekraczającego 1.

W drugą stronę analogicznie, tylko trzeba pomniejszać indeksy liczb Fibonacciego. Na przykład: ile mil to 100 kilometrów? Liczymy:  $100 = 89 + 8 + 3$ , więc bierzemy liczby Fibonacciego przesunięte w lewo:  $55 + 5 + 2 = 62$  mile. W rzeczywistości powinno wyjść 62,137, więc tym razem błąd jest mały. Mieliśmy szczęście. Podobnie jak z milami, aż do 95 km podana konwersja nie oszuka nas o więcej niż 1. Przy czym stosujemy zasadę: zostawiamy ostatnią jedynekę rozwinięcia; przecież na lewo od jedynek  $F_2$  jest jedynka  $F_1$ .

Pozostaje nauczyć się liczb Fibonacciego na pamięć. Pamiętajmy:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1567, 2584, ...

## Pewne uogólnienie prostej Eulera

*Chuong Chi NGUYEN\**, *Hung Son NGUYEN\**

Panuje przekonanie, że w niemodnej obecnie dziedzinie geometrii klasycznej wszystko jest znane i nie pozostało nic do odkrycia. Kłam temu stwierdzeniu zadaje dość ciekawe i (jeszcze) mało znane twierdzenie, które przedstawiamy w niniejszym artykule. Warto zaznaczyć, że środki, jakie posłużyły nam do dowodu, są czysto geometryczne i nie korzystają z narzędzi analitycznych. Aby ułatwić jego zrozumienie, przedstawiamy najpierw pewne pojęcia, definicje i bardziej znane fakty powiązane z tym zagadnieniem.

**Definicja.** Trójkątem spodkowym punktu  $P$  wewnątrz trójkąta  $ABC$  nazywamy trójkąt, którego wierzchołkami są rzuty prostokątne punktu  $P$  na boki trójkąta  $ABC$ .

Wykażemy teraz, że dla każdego trójkąta spodkowego można wskazać pewien „stowarzyszony” z nim trójkąt spodkowy.

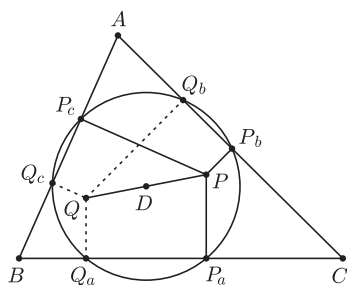
**Lemat 1.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta  $ABC$ , a  $P_aP_bP_c$  jego trójkątem spodkowym. Okrąg opisany na trójkącie  $P_aP_bP_c$  przecina boki  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  dodatkowo w punktach  $Q_a, Q_b, Q_c$ . Wtedy  $Q_aQ_bQ_c$  też jest trójkątem spodkowym dla pewnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta  $ABC$ .

**Dowód.** Niech  $D$  będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $P_aP_bP_c$ , a  $Q$  punktem symetrycznym do punktu  $P$  względem  $D$ . Z oczywistych powodów  $D$  należy do symetralnej odcinka  $P_aQ_a$  oraz  $PP_a$  jest prostopadły do  $BC$ , więc  $PP_aQ_aQ$  jest trapezem. To oznacza, że  $QQ_a$  jest prostopadły do  $BC$ . Analogicznie otrzymujemy, że  $QQ_b$  i  $QQ_c$  są prostopadłe odpowiednio do  $CA$  i  $AB$ . Inaczej mówiąc,  $Q_aQ_bQ_c$  jest trójkątem spodkowym punktu  $Q$  względem trójkąta  $ABC$ .  $\square$

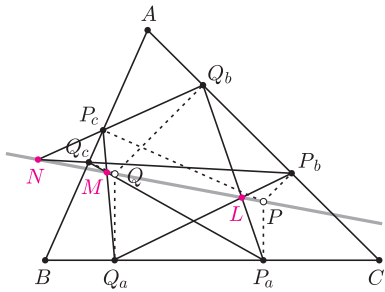
Zauważmy, że na czworokątach  $CP_aPP_b$ ,  $CQ_aQQ_b$  i  $Q_aP_aP_bQ_b$  można opisać okręgi, a zatem

$$\sphericalangle PCP_b = \sphericalangle PP_aP_b = 90^\circ - \sphericalangle P_bP_aC = 90^\circ - \sphericalangle Q_aQ_bC = \sphericalangle QQ_bQ_a = \sphericalangle QCQ_a.$$

Analogicznie pokazujemy, że  $\sphericalangle PAP_b = \sphericalangle QAQ_c$  i  $\sphericalangle PBP_a = \sphericalangle QBQ_c$ , co oznacza, że punkty  $P$  i  $Q$  są izogonalnie sprzężone w trójkącie  $ABC$ . Zauważmy też, że jeśli  $P$  nie jest środkiem okręgu wpisanego, to  $P \neq Q$ . Poniżej przedstawiamy pewną własność prostej przechodzącej przez punkty izogonalnie sprzężone w dowolnym trójkącie.



\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

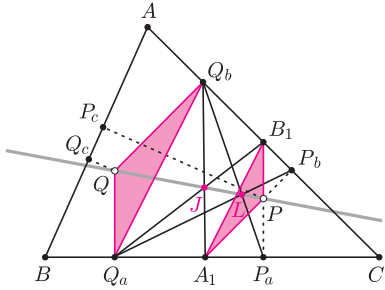


**Stwierdzenie 1.** Niech  $P_a P_b P_c$ ,  $Q_a Q_b Q_c$  będą trójkątami spodkowymi punktów  $P$  i  $Q$ , leżących wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Punkty przecięcia prostych  $P_a Q_b$  i  $Q_a P_b$ ,  $P_a Q_c$  i  $Q_a P_c$  oraz  $P_b Q_c$  i  $Q_b P_c$  oznaczamy odpowiednio jako  $L$ ,  $M$  i  $N$ . Wówczas jeśli punkty  $P$  i  $Q$  są izogonalnie sprzężone, to punkty  $L, M, N$  leżą na prostej przechodzącej przez  $P$  i  $Q$ .

*Dowód.* Niech  $A_1 = PP_b \cap BC$ ,  $B_1 = PP_a \cap CA$  i  $J = Q_a B_1 \cap A_1 Q_b$ . Wówczas na czworokącie  $P_a A_1 B_1 P_b$  można opisać okrąg. Ponadto z wcześniejszych rozważań wynika, że na czworokącie  $P_a P_b Q_b Q_a$  również można opisać okrąg. W tej sytuacji

$$\sphericalangle B_1 A_1 C = \sphericalangle P_a P_b C = \sphericalangle Q_b Q_a C,$$

więc  $A_1 B_1 \parallel Q_b Q_a$ . Mamy również  $PA_1 \parallel QQ_b$  (oba są prostopadłe do  $AC$ ),  $PB_1 \parallel QQ_a$  (oba są prostopadłe do  $BC$ ), co oznacza, że trójkąty  $PA_1 B_1$  i  $QQ_b Q_a$  są jednokładne, zatem proste łączące odpowiadające pary wierzchołków przecinają się w jednym punkcie, skąd wnioskujemy, że  $J$  należy do prostej  $PQ$ . Następnie, stosując twierdzenie Pappusa dla dwóch układów potrójnych punktów współliniowych  $(P_a, A_1, Q_a)$  i  $(P_b, B_1, Q_b)$  z uwagą, że  $P = P_a B_1 \cap P_b A_1$ ,  $L = P_a Q_b \cap Q_a P_b$  i  $J = Q_a B_1 \cap Q_b A_1$  wnioskujemy, że  $P, L, J$  są współliniowe. Wiemy więc, że  $J$  leży na prostej  $PQ$ , a  $L$  leży na prostej  $PJ$ , zatem  $L$  leży na prostej  $PQ$ . Analogicznie dowodzimy, że punkty  $M$  i  $N$  leżą na prostej  $PQ$ , co kończy dowód lematu.  $\square$



Rzutowanie punktu na boki to nie jedyny naturalny sposób na konstrukcję „nowego” trójkąta. Inny prezentuje poniższa definicja.

**Definicja.** Trójkątem Cevy punktu  $R$  leżącego wewnątrz trójkąta  $ABC$  nazywamy trójkąt  $R_a R_b R_c$ , gdzie  $R_a, R_b, R_c$  są punktami przecięcia prostych  $AR, BR, CR$  odpowiednio z bokami  $BC, CA, AB$ .

Okazuje się, że dla trójkąta Cevy również prawdziwy jest fakt wykazany wcześniej dla trójkąta spodkowego.

**Lemat 2.** Niech  $S_a, S_b, S_c$  będą punktami przecięcia okręgu opisanego na trójkącie Cevy  $R_a R_b R_c$  wewnątrz trójkąta  $ABC$  odpowiednio z bokami  $BC, CA$  i  $AB$ . Wtedy proste  $AS_a, BS_b$  i  $CS_c$  przecinają się w jednym punkcie.

*Dowód.* Zgodnie z twierdzeniem Cevy, skoro proste  $AR_a, BR_b, CR_c$  przecinają się w punkcie  $R$ , zachodzi

$$\frac{R_a B}{R_a C} \cdot \frac{R_b C}{R_b A} \cdot \frac{R_c A}{R_c B} = 1.$$

Ponieważ  $R_a, R_b, S_b, R_c, S_c$  i  $S_a$  należą do wspólnego okręgu, więc z twierdzenia o potęgach punktu względem okręgu mamy

$$AR_b \cdot AS_b = AR_c \cdot AS_c, BR_c \cdot BS_c = BR_a \cdot BS_a, \text{ i } CR_a \cdot CS_a = CR_b \cdot CS_b.$$

Stąd

$$\frac{S_b A}{S_c A} = \frac{R_c A}{R_b A}, \quad \frac{S_c B}{S_a B} = \frac{R_a B}{R_c B}, \quad \text{ i } \quad \frac{S_a C}{S_b C} = \frac{R_b C}{R_a C}$$

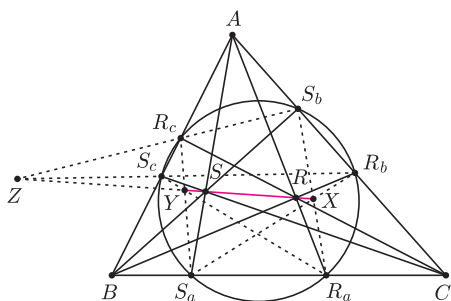
Podstawiając te wartości do pierwszego równania, otrzymujemy

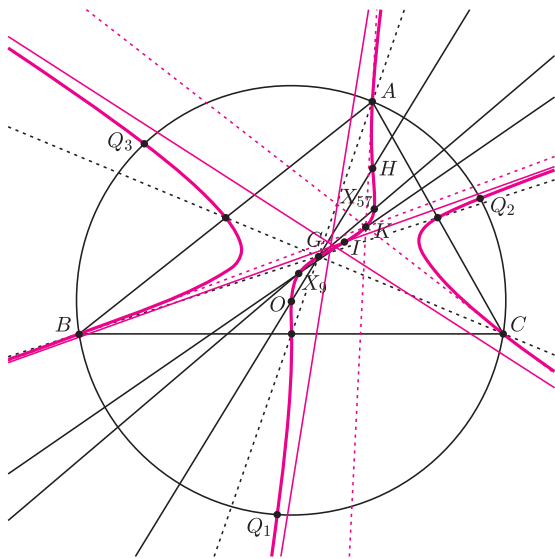
$$\frac{S_a B}{S_a C} \cdot \frac{S_c A}{S_c B} \cdot \frac{S_b C}{S_b A} = 1.$$

Ostatnia równość, zgodnie z odwrotnym twierdzeniem Cevy, dowodzi, że  $AS_a, BS_b$  i  $CS_c$  zbiegają się w jednym punkcie.  $\square$

Powyższe rozważania pokazują, że dla każdego punktu  $R$  wewnątrz trójkąta  $ABC$  istnieje dokładnie jeden „stowarzyszony” z nim punkt  $S$ , będący punktem przecięcia prostych  $AS_a, BS_b$  i  $CS_c$ . Prosta przechodząca przez te dwa punkty nazywamy osią Cevy. Niżej przedstawiamy ciekawą własność osi Cevy:

**Stwierdzenie 2.** Niech  $R$  i  $S$  będą dwoma stowarzyszonymi punktami Cevy wewnątrz trójkąta  $ABC$  i niech odpowiadają im trójkąty Cevy  $R_a R_b R_c$  i  $S_a S_b S_c$ . Niech  $X, Y$  i  $Z$  będą odpowiednio punktami przecięcia prostych  $S_b R_a$  i  $S_a R_b$ ,  $R_a S_c$  i  $R_c S_a$  oraz  $R_b S_c$  i  $R_c S_b$ . Wówczas punkty  $R, S, X, Y, Z$  są współliniowe (tworzą oś Cevy  $RS$ ).





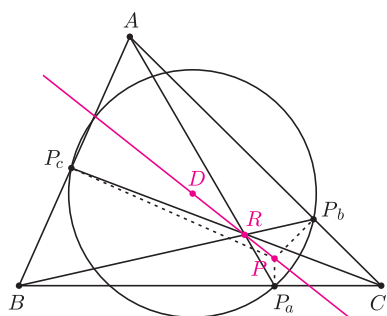
Krzywa trzeciego stopnia Darboux

*Dowód.* Stosując twierdzenie Pappusa dla dwóch potrójnych układów punktów współliniowych  $(A, S_b, R_b)$  i  $(B, S_a, R_a)$  z uwagą, że  $S = AS_a \cap BS_b$ ,  $R = AR_a \cap BR_b$  i  $X = S_bR_a \cap S_aR_b$  wnioskujemy, że  $X$  leży na prostej  $RS$ . Analogicznie dowodzimy, że punkty  $Y$  i  $Z$  leżą na prostej  $RS$ , co kończy dowód lematu.  $\square$

Nasze dotychczasowe zmagania dotyczyły dwóch trójkątów, spodkowego i Cevy. Z każdym z nich związałyśmy pewną oś, wskazując szczególne punkty, które się na niej znajdują. Jesteśmy już gotowi na to, by zając się trójkątami, które są jednocześnie trójkątami spodkowymi i trójkątami Cevy.

**Definicja.** Jeśli spodkowy trójkąt punktu  $P$  jest również trójkątem Cevy, to punkt  $P$  nazywamy *czewiańskim punktem spodkowym* (ang. *pedal-cevian point*).

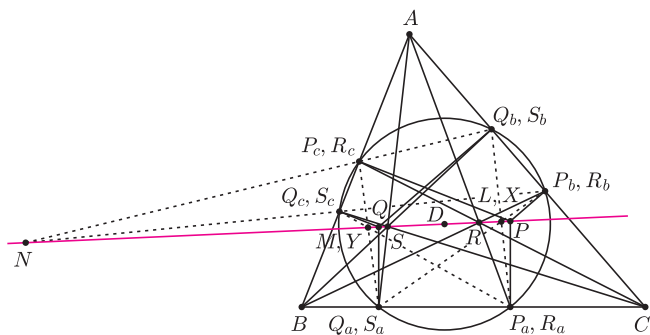
Wiele właściwości tych punktów można znaleźć w pracach Darboux. Jednym z jego znanych wyników, uzyskanych metodami algebraicznymi, jest dowód, że czewiańskie punkty spodkowe ustalonego trójkąta tworzą tzw. krzywą trzeciego stopnia Darboux; jest ich zatem nieskończenie wiele.



Zapewne wśród osób zainteresowanych geometrią wiele nieraz miało do czynienia z zadaniami dotyczącymi czewiańskich punktów spodkowych. Przykładami takich punktów w dowolnym trójkącie są m.in. jego ortocentrum, środek ciężkości, środek okręgu wpisanego i środek okręgu opisanego.

Chcielibyśmy teraz przedstawić pewną ciekawą własność czewiańskich punktów spodkowych. Nie udało się nam odnaleźć publikacji przedstawionego rezultatu, więc jest niemała szansa na to, że to wynik całkiem nowy. Niezależnie od słuszności naszych przypuszczeń, uważamy, że każdy miłośnik geometrii doceni jego elegancję!

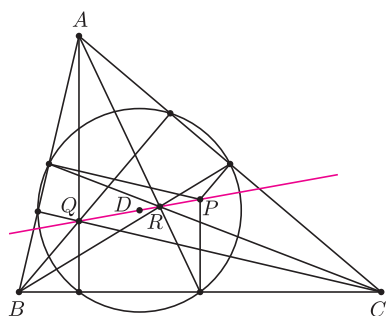
**Twierdzenie.** Niech  $P_aP_bP_c$  będzie trójkątem spodkowym punktu  $P$  wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Dodatkowo zakładamy, że  $AP_a, BP_b, CP_c$  przecinają się w punkcie  $R$ . Wtedy punkty  $P, R$  i środek okręgu opisanego na  $P_aP_bP_c$  leżą na jednej prostej.



*Dowód.* Niech  $D$  będzie środkiem okręgu opisanego na  $P_aP_bP_c$  i niech punkty  $L, M, N$  będą zdefiniowane tak, jak w stwierdzeniu 1. Zgodnie z tym stwierdzeniem punkty te są współliniowe, a prosta przez nie przechodząca zawiera również punkty  $P$  i  $D$  (jest to oś trójkąta spodkowego dla punktu  $P$ ). Prosta ta jest jednak również osią trójkąta Cevy punktu  $R$ , zatem zgodnie ze stwierdzeniem 2 przechodzi przez  $R$ , co dowodzi współliniowości punktów  $P, R, D$ .  $\square$

Zastanówmy się, czym skutkować będzie powyższe stwierdzenie, jeśli za punkt  $P$  przyjmiemy środek

okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Okazuje się, że wówczas okrąg opisany na punktach  $P_aP_bP_c$  zawiera spodki wysokości trójkąta  $ABC$  – jest to słynny okrąg dziewięciu punktów. W tej sytuacji punkt  $Q$  ze stwierdzenia 1 staje się ortocentrum trójkąta  $ABC$ , a punktem  $R$  z naszego twierdzenia jest, rzecz jasna, środek ciężkości trójkąta  $ABC$ . Pokazaliśmy więc współliniowość środka okręgu opisanego, środka okręgu 9 punktów, ortocentrum i środka ciężkości – geometryczni smakosze z łatwością rozpoznają w tym prostą Eulera.



Prosta Eulera

Warto zaznaczyć, że prosta Eulera nie jest określona dla trójkąta równobocznego, a nasza oś  $PQRSD$  istnieje, o ile tylko nie przyjmiemy, że  $P = Q$  to środek okręgu wpisanego. Zachęcamy Czytelnika do poszukiwań innych ciekawych prostych, których istnienie gwarantowane jest przez podane przez nas twierdzenie!