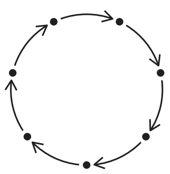
Okrągły stół i trójkąty

Joanna JASZUŃSKA

Turniej to zestaw rozgrywek pomiędzy pewną liczbą graczy, w którym każdy gra dokładnie jeden mecz z każdym z pozostałych i nie ma remisów. Jeśli zawodnik wygrał wszystkie swoje mecze, nazwiemy go *zwycięzcą*.

Cykl to taki ciąg co najmniej trzech różnych zawodników, w którym każdy wygrał z następnym, a ostatni z pierwszym (rys. 1). *Trójkąt* to cykl o długości trzy.

$A \to B$ oznacza, że A wygrał z B.



Rys. 1. Uczestnicy cyklu przy okrągłym stole; każdy wygrał z osobą siedzącą na lewo od niego.

1. Wykaż, że w każdym turnieju istnieje zwycięzca lub istnieje trójkąt.

2. Wykaż, że jeśli w turnieju nie ma trójkąta, to wszystkich graczy można ustawić w rzędzie tak, że każdy wygrał ze wszystkimi zawodnikami stojącymi za nim.

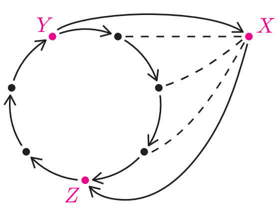
3. Udowodnij, że jeśli w turnieju istnieje cykl o więcej niż trzech graczach, to istnieje trójkąt.

4. Udowodnij, że po każdym turnieju albo można wszystkich uczestników ustawić w cykl, albo można ich tak podzielić na dwie grupy $\mathcal{G}$ i $\mathcal{D}$, że każdy z grupy $\mathcal{G}$ wygrał z każdym z grupy $\mathcal{D}$.

Rozwiązania

R1. Niech M będzie zawodnikiem, który wygrał maksymalną liczbę meczów. Jeśli wygrał wszystkie, jest zwycięzcą. W przeciwnym wypadku istnieje zawodnik W, który wygrał z M oraz istnieje przynajmniej jeden zawodnik pokonany przez M.

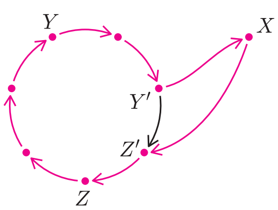
Gdyby gracz W zwyciężył ze wszystkimi, którzy przegrali z M, to W wygrałby więcej meczów niż M (bo pokonał też M) – sprzeczność. Zatem W przegrał z którymś z graczy, z którymi wygrał M, czyli istnieje trójkąt. $\square$



Rys. 2

R2. Z zadania 1 wiemy, że skoro nie ma trójkąta, to istnieje zwycięzca Z_1; ustawmy go na początku rzędu. W gronie pozostałych graczy również nie ma trójkąta, więc istnieje gracz Z_2, który pokonał ich wszystkich (ale nie Z_1) – ustawmy go na drugim miejscu rzędu. Kolejnych graczy ustawiamy analogicznie. $\square$

R3. Niech $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_k \to A_1$ będzie cyklem, gdzie $k > 3$. Rozważmy mecz $A_1 - A_3$. Jeśli wygrał go gracz A_3, otrzymujemy trójkąt $A_1A_2A_3$. W przeciwnym przypadku otrzymujemy cykl $A_1 \to A_3 \to A_4 \to \ldots \to A_k \to A_1$ o $k-1$ graczach. Jeśli jest ich więcej niż 3, postępujemy dalej analogicznie. $\square$

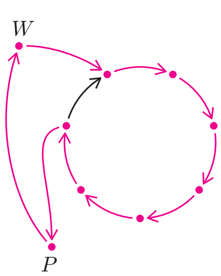


Rys. 3. Cykl dłuższy o 1 od cyklu $\mathcal{C}$

R4. Jeśli nie ma żadnych cykli, to nie ma trójkątów i na mocy zadania 1 istnieje zwycięzca. Wówczas niech grupa $\mathcal{G}$ składa się tylko z niego, a grupa $\mathcal{D}$ z pozostałych zawodników.

Jeśli istnieją cykle, to rozważmy cykl $\mathcal{C}$ o maksymalnej długości. Jeżeli $\mathcal{C}$ zawiera wszystkich graczy, to teza jest spełniona. W przeciwnym przypadku istnieje osoba X, która nie należy do cyklu $\mathcal{C}$.

Wykażemy, że X albo wygrał ze wszystkimi zawodnikami z $\mathcal{C}$, albo ze wszystkim przegrał. Załóżmy przeciwnie, że X przegrał z Y, ale wygrał z Z z cyklu (rys. 2). Wówczas w cyklu $\mathcal{C}$ na „drodze” od Y do Z istnieją tacy dwaj *kolejni* zawodnicy Y', Z', że X przegrał z Y', ale wygrał z Z' . Wtedy cykl $\mathcal{C}$ można wydłużyć, dołączając zawodnika X pomiędzy Y' a Z' (rys. 3), sprzecznie z założeniem o maksymalności $\mathcal{C}$.



Rys. 4. Cykl dłuższy o 2 od cyklu $\mathcal{C}$

Jeżeli istnieją zawodnicy W i P spoza cyklu $\mathcal{C}$, którzy odpowiednio wygrali i przegrali ze wszystkimi z cyklu, to W wygrał z P, gdyż w przeciwnym razie cykl można by wydłużyć o tych dwóch graczy w sposób przedstawiony na rysunku 4.

Niech do grupy $\mathcal{G}$ należą wszyscy zawodnicy, którzy wygrali z graczami z $\mathcal{C}$, do $\mathcal{D}$ ci, którzy przegrali z uczestnikami $\mathcal{C}$. Wszystkich graczy z cyklu $\mathcal{C}$ dołączmy do dowolnego spośród zbiorów $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$. W ten sposób otrzymujemy żądany podział. $\square$

Zadanie domowe

5. Wykaż, że po każdym turnieju wszystkich jego uczestników można ustawić w rzędzie tak, że każdy wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim.