swojego pomiaru, autorzy artykułu sprawdzili również konkurencyjne hipotezy: pierwsza z nich wskazywała, że GN-z11 jest tak naprawdę pełną pyłu galaktyką o przesunięciu ku czerwieni wynoszącym $z = 2{,}5$, w której ustały procesy gwiazdotwórcze, natomiast druga oparta była na przesłaniu, że jest to galaktyka z ekstremalnie silnymi liniami emisyjnymi o przesunięciu ku czerwieni $z = 2{,}1$. Jednak dla obu tych modeli zyskano znacznie gorsze dopasowania niż dla $z = 11{,}1$.

W taki właśnie sposób została odkryta – jeśli o odkryciu wolno tu mówić – najdalsza znana obecnie galaktyka.

Samo bicie rekordów odległości nie jest tu jednak, moim zdaniem, najważniejsze. Istotne wydaje się to, że w ten sposób możemy obserwować bardzo młode galaktyki. Obserwujemy GN-z11 taką, jaka była zaledwie 400 mln lat po Wielkim Wybuchu, gdy powstawały w niej pierwsze gwiazdy, obecnie już dawno wygasłe. Dzięki tej obserwacji mamy, na razie wąski, wgląd w początki istnienia galaktyk i na tej podstawie otwiera się przed nami możliwość weryfikacji istniejących hipotez powstawania galaktyk takich, jakie znamy dzisiaj, w tym naszej.

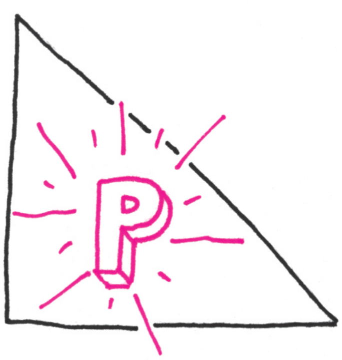
Najłatwiejsze zadanie?

Kamil RYCHLEWICZ, Mariusz SKAŁBA***

Na drugim etapie tegorocznej Olimpiady Matematycznej pojawiło się następujące zadanie:

Zadanie 1. *We wnętrzu trójkąta o bokach długości* 3, 4, 5 *leży punkt* P. *Wykazać, że jeżeli odległości* P *od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości* P *od boków też.*

Zadanie pojawiło się na zawodach z numerem 1 i (zgodnie z oczekiwaniami) okazało się bardzo łatwe – rozwiązała je znacząca większość uczestników. Przedstawimy szkic rozwiązania.



Umieśćmy trójkąt (który jest, oczywiście, prostokątny) w układzie współrzędnych tak, by jego wierzchołkami były $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, 3)$. Niech punkt P ma współrzędne (x, y). Wtedy z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|PA| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|PB| = \sqrt{(4 - x)^2 + y^2}$. Stąd

$$|PA|^2 - |PB|^2 = (x^2 + y^2) - (16 - 8x + x^2 + y^2) = 8x - 16,$$

a ponieważ $|PA|, |PB| \in \mathbb{Q}$, to $x \in \mathbb{Q}$. Analogicznie $y \in \mathbb{Q}$. Zatem wykazaliśmy, że punkt P leży w wymiernych odległościach od boków AB i AC. Odległość od boku BC możemy obliczyć, korzystając, na przykład, ze wzoru na odległość punktu od prostej. Ponieważ prosta BC jest opisana równaniem $3x + 4y - 12 = 0$, to szukana odległość wynosi

$$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 12|}{5},$$

czyli jest wymierna. □

Pomimo niewielkiej trudności samego zadania możemy powiązać z nim kilka ciekawych problemów. Pierwsze pytanie, które się nasuwa, brzmi: *czy w ogóle istnieje punkt spełniający warunki zadania*? Przed przejściem do dalszej części artykułu Czytelnik może sam spróbować poszukać takich punktów.

Chociaż ich ręczne znalezienie może być trudne, z pomocą komputera szybko znajdujemy kilka punktów spełniających nasze warunki. Najprostszy z nich (o najmniejszych mianownikach) ma współrzędne $\left(\frac{20}{23}, \frac{21}{23}\right)$ i jest odległy od wierzchołków A, B, C odpowiednio o $\frac{29}{23}$, $\frac{75}{23}$, $\frac{52}{23}$.

Tak naprawdę powiedzieć możemy dużo więcej. J.H.J. Almering w 1963 roku udowodnił, że *dla dowolnego (niekoniecznie prostokątnego) trójkąta o bokach wymiernej długości zbiór punktów, których odległości od wszystkich wierzchołków są wymierne, nie tylko jest niepusty, ale nawet nieskończony i ponadto jest gęstym podzbiorem płaszczyzny*! Jak dowodzi T.G. Berry w pracy z 1992 roku, wystarczy jedynie założyć, że kwadraty długości boków są wymierne i co najmniej jeden bok trójkąta ma długość wymierną – to ostatnie założenie jest konieczne, bo w trójkącie o bokach $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nie ma żadnego punktu o wymiernych odległościach od wierzchołków (zachęcamy Czytelnika do samodzielnego udowodnienia tego faktu).

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Kolejne pytanie, jakie możemy sobie postawić, dotyczy uogólnienia wyjściowego zadania. Rozumowanie analogiczne do przedstawionego powyżej rozwiązania pokazuje, że *teza zadania jest spełniona dla dowolnego trójkąta prostokątnego o bokach wymiernych.*

Wykażemy teraz, że teza zachodzi dla dowolnego trójkąta o bokach długości wymiernej i wymiernym polu. Zacznijmy od prostego lematu.

Lemat 1. *Załóżmy, że trójkąt ABC ma wymierne boki. Niech AD będzie wysokością tego trójkąta. Wtedy odcinki BD i CD mają długości wymierne.*

$|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$
$|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$

Dowód. Wiemy, że $|BD| + |CD| = |BC|$ lub $|BD| - |CD| = |BC|$, co jest liczbą wymierną. Ponadto z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|BD|^2 - |CD|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$, co też jest wymierne. Stąd $|BD| + |CD|$ i $|BD| - |CD|$ są wymierne, co natychmiast implikuje tezę lematu. □

Załóżmy teraz, że trójkąt ABC ma wymierne boki i wymierne pole. Przyjmując oznaczenia jak w lemacie, dostajemy, że $|AD|$ jest wymierne (ze wzoru na pole trójkąta), a także $|BD|$ i $|CD|$ są wymierne. Zatem możemy ustawić trójkąt w układzie współrzędnych tak, aby punkty A, B, C miały odpowiednio współrzędne $(0, a)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$ dla pewnych liczb wymiernych a, b, c. Rozważmy punkt $P = (x, y)$ o wymiernych odległościach od punktów A, B, C. Kwadraty tych odległości też są liczbami wymiernymi i są równe odpowiednio $x + (y - a)^2$, $(x - b)^2 + y^2$, $(x - c)^2 + y^2$. Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że wymierność tych liczb implikuje wymierność x i y.

Możemy pójść jeszcze dalej i zapytać, czy da się uogólnić ten rezultat na inne wielokąty. Okazuje się, że tak:

Załóżmy, że $W_1W_2 \ldots W_n$ jest wielokątem wypukłym o wymiernych bokach $b_1, \ldots, b_n$ i wymiernym polu S, a P niech będzie punktem we wnętrzu tego wielokąta. Wówczas, jeśli wszystkie odległości P od wierzchołków tego wielokąta są wymierne, to również wszystkie odległości P od jego boków są wymierne.

Dowód korzysta z następującego prostego faktu.

Lemat 2. *Jeśli długości boków trójkąta a, b, c są wymierne, to jego pole s spełnia warunek $s^2 \in \mathbb{Q}$.*

Wynika to, na przykład, ze słynnego wzoru Herona

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ gdzie } p = (a+b+c)/2,$$

ale można udowodnić to dużo prościej. Następny lemat jest bardziej wyrafinowany, ale przy naszym podejściu niezbędny.

Lemat 3. *Załóżmy, że liczby $q_1, \ldots, q_n$ są wymierne i dodatnie oraz że liczba $\sqrt{q_1} + \ldots + \sqrt{q_n}$ też jest wymierna. Wówczas wszystkie liczby $\sqrt{q_j}$ są wymierne.*

Czytelnik Oblatany może zgłębić zakamarki dowodu, a Czytelnik Nieśmiały na ten czas może przyjąć jego poprawność na wiarę i przejść do dalszej części.

Dowód. Załóżmy, że jest inaczej i rozważmy ciało $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_n})$. Mamy więc $K \neq \mathbb{Q}$ i ciało K jest rozszerzeniem Galois ciała $\mathbb{Q}$ (gdyż jest ciałem rozkładu wielomianu $\prod_{j=1}^{n}(x^2 - q_j)$). Niech σ będzie dowolnym nietrywialnym automorfizmem K nad $\mathbb{Q}$. Ponieważ

$$\sqrt{q_1} + \ldots + \sqrt{q_n} = w \in \mathbb{Q}, \quad \text{więc} \quad \sigma(\sqrt{q_1}) + \ldots + \sigma(\sqrt{q_n}) = \sigma(w) = w$$

(gdyż σ zachowuje działania). Dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ mamy $\sigma(\sqrt{q_j}) = \sqrt{q_j}$ albo $\sigma(\sqrt{q_j}) = -\sqrt{q_j}$. Ale z powyższych dwóch równości wynika, że zawsze musi być $\sigma(\sqrt{q_j}) = \sqrt{q_j}$, a zatem $\sigma = id$ – sprzeczność. □

Przechodzimy teraz do dowodu uogólnienia. Niech $s_1, \ldots, s_n$ będą polami trójkątów $W_1PW_2, \ldots, W_nPW_1$. Z lematu 2 mamy $s_j = \sqrt{q_j}$ gdzie $q_j \in \mathbb{Q}^+$ dla $j = 1, \ldots, n$. Z założenia $\sqrt{q_1} + \ldots + \sqrt{q_n} = S \in \mathbb{Q}$, a zatem na podstawie lematu 3 mamy $s_j = \sqrt{q_j} \in \mathbb{Q}$ dla $j = 1, \ldots, n$. Z wymierności boków wielokąta i wzoru na pole trójkąta wynika teraz, że odległości punktu P od boków są wymierne.

Rozwiązanie zadania M 1515.
Niech $h_a = 2$, $h_b = 3$ i $h_c = 4$ będą wysokościami trójkąta, spuszczonymi odpowiednio na boki długości a, b oraz c. Wówczas wiemy, że $h_a a = h_b b = h_c c$. W takim razie $a = 6x$, $b = 4x$ i $c = 3x$ dla pewnego x.

Ze wzoru Herona pole tego trójkąta jest równe $\frac{\sqrt{x \cdot 5x \cdot 7x \cdot 13x}}{4}$. Po przyrównaniu tej wartości do $\frac{1}{2} h_a a = 6x$, otrzymujemy $x = \frac{24}{\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 13}}$, skąd można obliczyć obwód trojkąta $p = 13x = 24 \cdot \sqrt{13/35}$.