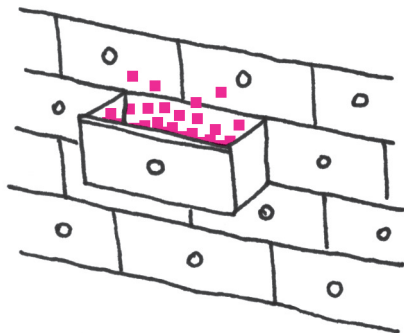


W wersji anglosaskiej zasada ta jest znana pod nazwą *pigeon hole principle*, czyli zasada klatek w gołębniku; rolę szuflad pełnią klatki, rolę obiektów gołębie.



Trzeciego sposobu przedstawienia $\frac{1}{2}$ już być nie może, choć to wcale nie jest aż tak oczywiste, jakby się mogło wydawać. Ciekawe też, że niektóre liczby wymierne mają tylko jedno przedstawienie, a niektóre dwa. Czy widzisz, Czytelniku, które?

	0	0	0	1	1	0	1
2^i	64	32	16	8	4	2	1
i	6	5	4	3	2	1	0

Tak zwana zasada szufladkowa Dirichleta, jakże lubiana przez rozmaite komitety olimpiad matematycznych, łączy w sobie dwie atrakcyjne cechy. Z jednej strony jest tak prosta, że nawet dziecko w przedszkolu jest w stanie ją zrozumieć, z drugiej zaś zawiera zupełnie nieoczywisty element niekonstruktywny. Głosi ona mianowicie, że wkładając do n szuflad więcej niż n przedmiotów, mamy pewność, że w którejś szufladzie będą co najmniej dwa obiekty. W której – nie wiadomo, ale na pewno w którejś. W kombinatoryce czasami spotykamy sytuację, w której można zastosować niejako dualne rozumowanie: jeśli do n szuflad włożymy n obiektów i żadna szuflada pusta nie będzie, to w żadnej szufladzie nie może się znaleźć więcej niż jeden obiekt. Możemy powiedzieć dosadniej: w każdej szufladzie będzie dokładnie jeden obiekt. Znowu, można powiedzieć, to widzi każdy przedszkolak, ale, wbrew pozorom, spostrzeżenie to ułatwia często rozumowanie w stopniu podobnym, jak wspomniana zasada szufladkowa.

Wynalazek systemu dziesiętnego był dla matematyki przełomowy. Zapisywanie liczb w układzie pozycyjnym uprościło niezwykle zarówno sam sposób opisu, jak i – przede wszystkim – algorytmy wykonywania na nich działań. (Jeśli ktoś nie wierzy, niech spróbuje w systemie rzymskim np. pomnożyć dwie liczby kilkucyfrowe.) Jedną z miłych i wcale nieoczywistych cech układu pozycyjnego jest to, że da się w nim wyrazić każdą liczbę naturalną i to na jeden tylko sposób, jeśli umówimy się, że nie piszemy zer przed właściwymi cyframi. To, że taka jednoznaczność przedstawienia nie jest oczywista, widać choćby gdy przejdziemy do liczb wymiernych. Na przykład $0,49999\dots$ i $0,50000\dots$ to dwa różne okresowe zapisy tej samej liczby $\frac{1}{2}$. Żeby było ciekawiej, z kolei liczby niewymierne mają zawsze jednoznaczne przedstawienie w postaci nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego.

Okazuje się, że nie tylko system dziesiętny ma te własności. Wystarczy wziąć dowolną podstawę systemu pozycyjnego większą od 1 i otrzymamy analogiczne wyniki – też niektóre liczby wymierne będą miały dwa przedstawienia (ale będą to na ogół inne liczby niż w przypadku systemu dziesiętnego), też wszystkie wymierne liczby będą miały reprezentacje okresowe i też liczby naturalne będą miały jednoznaczne przedstawienie. Chyba jako pierwszy odkrył to w XVII wieku dla układu dwójkowego Gotfried Wilhelm Leibniz, który tak się zachwycił możliwościami systemu binarnego, że postulował powszechnie przejście z systemu dziesiętnego na dwójkowy. Jakże przyjemna stałaby się nauka tabliczki mnożenia! Wystarczyłoby zapamiętać wyniki mnożenia zer i jedynek przez zera i jedynki.

Spróbujmy wykazać, że w systemie dwójkowym faktycznie wszystkie liczby naturalne mają jednoznaczne przedstawienie. Przypomnijmy: system dwójkowy operuje tylko dwiema cyframi: zerem i jedynką. Na pozycji i -tej od końca (przy czym umówmy się, że ostatnia pozycja ma numer 0, przedostatnia 1, itd.) mamy cyfrę 1 lub 0, w zależności od tego, czy w skład liczby, którą chcemy reprezentować, wchodzi wartość 2^i , czy nie. Taką cegiełkę 2^i możemy przy tym użyć co najwyżej raz – dlatego mamy tylko dwie cyfry w układzie dwójkowym. Na przykład liczba 13 ma przedstawienie dwójkowe 1101, gdyż $13 = 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Zatem komponujemy wartość każdej liczby jako sumę pojedynczych potęg dwójki.

Pokażemy najpierw, że każdą liczbę dodatnią da się przedstawić w zapisie dwójkowym co najmniej na jeden sposób. Zero to 0, więc się da. Weźmy teraz dowolną dodatnią liczbę całkowitą n . Załóżmy (indukcja), że mniejsze od niej liczby mają przedstawienie dwójkowe, czyli dadzą się uzyskać przez zsumowanie różnych pojedynczych potęg dwójek. Niech $k = 2^j$ będzie największą potęgą dwójki nieprzekraczającą n . Liczba $n' = n - k$ jest nieujemna i mniejsza od n , więc na mocy założenia indukcyjnego ma przedstawienie dwójkowe. Jednocześnie $n' < k$, bo inaczej k nie byłoby największą potęgą dwójki mniejszą od n . Zatem biorąc jedynkę na pozycji j , a następnie dopisując rozwinięcie liczby n' (oczywiście, użyjemy tylko pozycji $j - 1, j - 2, \dots, 0$), otrzymujemy liczbę n

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

reprezentowaną za pomocą $j + 1$ cyfr binarnych. Czy jednak nie można liczby n otrzymać w inny sposób, zakładając, że każdą potęgę dwójki bierzemy tylko co najwyżej raz? Okazuje się, że nie i w celu pokazania tej jednoznaczności użyjemy naszej odwróconej zasady Dirichleta.

Podobnie jest zresztą w systemie dziesiętnym: największa dziesiętna liczba j -cyfrowa to $10^j - 1$.

Zauważmy, że największa liczba, którą da się zapisać za pomocą początkowych j potęg dwójki, to $2^j - 1$. Jeżeli bowiem złożymy liczbę z j jedynek, czyli weźmiemy wszystkie wartości odpowiadające bitom $j - 1, j - 2, \dots, 0$, to uzyskamy $\sum_{k=0}^{j-1} 2^k = 2^j - 1$. Zatem, jeśli jeszcze przypomnimy sobie o zerze, reprezentowanym przez j zer, to okaże się, że na co najwyżej j bitach możemy reprezentować 2^j liczb: wszystkie pomiędzy 0 a $2^j - 1$ włącznie.

A ile jest ciągów zerojedynekowych długości j ? Tyle samo, czyli 2^j . Zatem skoro każdą liczbę z zakresu $[0, \dots, 2^j - 1]$ da się reprezentować na j bitach, to nie jest możliwe, żeby dwa takie ciągi reprezentowały w tym zakresie tę samą liczbę – nie starczyłoby ich wtedy do reprezentowania wszystkich liczb. Ponieważ zaś j było wybrane dowolnie, więc rozumowanie to dotyczy każdego j -bitowego zakresu. Szufladkami w tym przypadku są liczby z zakresu $[0, \dots, 2^j - 1]$, a obiektami j -bitowe ciągi zerojedynekowe.

Liczby te, nazwane później jego imieniem, Fibonacci zdefiniował w słynnej – chyba pierwszej nowożytnej europejskiej książce matematycznej – *Liber abaci*, napisanej w 1202 r. Otrzymał je przy okazji analizy modelu wzrostu populacji królików w hodowli.

Dopiero w XX wieku został odkryty nowy binarny system reprezentowania liczb naturalnych za pomocą liczb Fibonacciego. Przypomnijmy: liczby te wprowadzone zostały do matematyki na początku XIII wieku przez włoskiego uczonego Leonarda z Pizy zwanego Fibonaccim. Definiujemy je tak: pierwsze dwie liczby Fibonacciego to 0 i 1, a każda następna jest sumą dwóch poprzednich. Wygodniej jest zacząć numerację od zera, więc mamy $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$. Liczby Fibonacciego tworzą nieskończony ciąg

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

Powstaje pytanie: czy liczby Fibonacciego mogłyby służyć jako podstawa systemu binarnego, w którym liczby naturalne komponowałibyśmy, nie sumując wybrane potęgi dwójki, lecz poprzez dodanie wybranych liczb Fibonacciego? Na przykład liczbę 10 można by było otrzymać jako $8 + 2$, ale też jako $5 + 3 + 2$, jak również $5 + 3 + 1 + 1$, czy wręcz $5 + 3 + 1 + 1 + 0$. Co prawda każdej liczby Fibonacciego moglibyśmy w naszym rozkładzie użyć tylko raz, bo system ma być binarny, ale i tak widać, że niektóre z tych rozkładów są sztuczne. Wprowadźmy zatem dwa ograniczenia:

- nie używamy pierwszych dwóch liczb Fibonacciego, czyli zera i pierwszej z jedynek;
- nie używamy dwóch sąsiednich liczb Fibonacciego – ich suma jest następną liczbą Fibonacciego, więc nie rozmienniamy na drobne samych liczb Fibonacciego; skupmy się na istotnie różnych reprezentacjach.

Przy tych ograniczeniach okaże się, że liczba 10 ma tylko jedno przedstawienie: $8 + 2$. Nie tylko 10. Jeżeli będziemy próbowali z innymi liczbami naturalnymi, to przekonamy się, że one też dadzą się przedstawić za pomocą takich sum i to tylko na jeden sposób respektujący podane wyżej zastrzeżenia. To jest właśnie treścią twierdzenia udowodnionego jeszcze przed II wojną światową, ale opublikowanego dopiero w 1972 r. przez Édouarda Zeckendorfa, a sposób reprezentowania liczb naturalnych nazywa się binarną reprezentacją Fibonacciego lub kodowaniem Zeckendorfa. Kodowanie to zakłada, że bit o numerze j odpowiada za liczbę F_{j+1} dla $j > 0$. Aby wykazać poprawność i jednoznaczność takiej reprezentacji, ponownie zastosujemy odwróconą zasadę Dirichleta.

Édouard Zeckendorf (1901–1983), Belg, był z zawodu lekarzem wojskowym, ale zajmował się matematyką w ramach hobby na tyle skutecznie, że opublikował kilkadziesiąt prac naukowych, głównie z teorii liczb.

Najpierw, tak jak poprzednio, pokażemy, że każda liczba ma przedstawienie Zeckendorfa. Podobnie jak w przypadku systemu binarnego użyjemy indukcji. Niech F_k będzie największą liczbą Fibonacciego, nieprzekraczającą n . Znowu dla $n = 1$ i $n = 2$ sprawdzamy bezpośrednio, że odpowiadają im ciągi 1 oraz 10. Załóżmy teraz, że $n > 2$ i że wszystkie liczby mniejsze od n mają przedstawienie Fibonacciego. Rozważmy największą liczbę Fibonacciego F_j nieprzekraczającą n . Nasza reprezentacja będzie zatem $(j + 1)$ -bitowa. Jej drugim bitem będzie zero,

i	7	6	5	4	3	2	1
F_{i+1}	21	13	8	5	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1
7	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	1
10	0	0	1	0	0	1	0
11	0	0	1	0	1	0	0
12	0	0	1	0	1	0	1
13	0	1	0	0	0	0	0
...							

Tabela kilku początkowych liczb w binarnej reprezentacji Fibonacciego

gdyż liczba $n - F_j$ musi być mniejsza od F_{j-1} , bo inaczej $F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$ byłaby mniejsza od n , co przeczyłoby definicji F_j . Dzięki temu, że drugi bit jest równy zeru, możemy skorzystać z założenia indukcyjnego i uzupełnić ciąg zaczęty od 10 o przedstawienie Fibonacciego liczby $n - F_j$. Będzie on na pewno poprawną reprezentacją n , w której żadne dwie jedynki nie wystąpią obok siebie.

Teraz zajmiemy się jednoznacznością. Najpierw jednak zastanówmy się, jak wygląda największa liczba reprezentowana w systemie Zeckendorfa na j bitach. Zaczyna się od jedynki odpowiedzialnej za wartość F_{j+1} , potem musi być zero (rezygnujemy z liczby F_j), a następnie największa liczba reprezentowana na $j - 2$ bitach, czyli znów jedynka odpowiadająca F_{j-1} , potem zero, jedynka, zero, aż dojdziemy do końca. W zależności od tego, czy j jest parzyste, czy nie, zakończymy naszą reprezentację zerem lub jedynką. Pokażemy teraz, że $F_{j+1} + F_{j-1} + F_{j-3} + \dots = F_{j+2} - 1$, czyli że największa liczba reprezentowana na j bitach jest $(j + 2)$ -gą liczbą Fibonacciego pomniejszoną o 1. Dla $j = 1$ zgadza się: największa liczba to 1, czyli $F_3 - 1$. Dla $j = 2$ też: ciąg 10 reprezentuje liczbę $2 = F_4 - 1$. Podwójne sprawdzenie bazy indukcji jest tu konieczne, ze względu na dwa możliwe zakończenia: zerem lub jedynką, w zależności od parzystości j . Jeśli teraz $j > 2$, to największa liczba j -bitowa ma wartość równą F_{j+1} plus, na mocy założenia indukcyjnego, największa liczba na $j - 2$ bitach, czyli $F_j - 1$. Ale $F_{j+1} + F_j - 1 = F_{j+2} - 1$ i mamy tezę.

Skoro już wiemy, że na j bitach można reprezentować wszystkie liczby od zera do $F_{j+2} - 1$, to zadajmy standardowe pytanie: a ile jest takich j -elementowych zerojedynekowych ciągów, że żadne dwie jedynki nie występują obok siebie. Oznaczmy tę liczbę przez $T(j)$. Dla $j = 0$ mamy odpowiedź $T(0) = 1$ (pusty ciąg). Dla $j = 1$ wiemy, że takich ciągów mamy 2, czyli $T(1) = 2$. Teraz zastanówmy się, jak to będzie w przypadku $j > 1$. Albo taki j -elementowy ciąg bitów kończy się jedynką, albo nie. Jeśli kończy się jedynką, to na przedostatnim bicie musi być zero, a na pozostałych $j - 2$ bitach dowolny układ, a ich jest $T(j - 2)$. Jeśli zaś taki ciąg kończy się zerem, to na pozostałych $j - 1$ bitach może być dowolny układ, a jest ich $T(j - 1)$. Ostatecznie mamy następujące równanie rekurencyjne:

$$T(0) = 1 (= F_2), \quad T(1) = 2 (= F_3), \quad T(j) = T(j - 2) + T(j - 1).$$

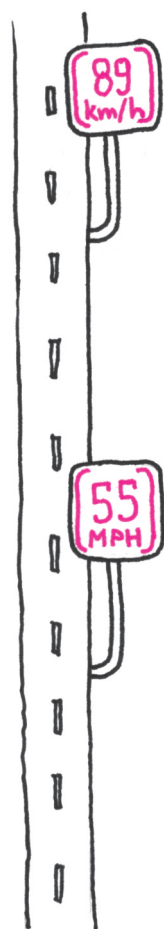
Rozwiązaniem tego układu jest $T(j) = F_{j+2}$.

Wiemy więc, że na j bitach można reprezentować co najwyżej F_{j+2} liczb i wiemy, że można reprezentować wszystkie liczby od 0 do $F_{j+2} - 1$, a jest ich oczywiście też F_{j+2} . No to nie ma tu miejsca na niejednoznaczność! Odwrócona zasada Dirichleta działa i tutaj. Każda liczba naturalna ma zatem jednoznaczne przedstawienie Fibonacciego.

Powstaje pytanie, czy takie binarne reprezentacje Fibonacciego mogą się do czegoś przydać? Nieoczekiwanie – poza interesującą własnością jednoznanego rozkładu – notacja Zeckendorfa daje nam pamięciową metodę przybliżonej konwersji mil na kilometry i na odwrót. Najpierw zastanówmy się, jak zmienia się wartość liczby zapisanej w notacji Zeckendorfa, gdy na końcu ciągu zer i jedynek reprezentujących jakąś liczbę dopiszemy zero. Sumowane wartości będą teraz odpowiadały liczbom Fibonacciego o indeksach o 1 większych. W układach pozycyjnych też jest podobnie: dopisanie zera na końcu liczby, np. w układzie dziesiętnym, powoduje, że każda cyfra zacznie odpowiadać dziesiątce podniesionej do potęgi o 1 wyższej, wskutek czego liczba zwiększy swoją wartość dziesięciokrotnie. Ilorotnie jednak zwiększy się wartość liczby zapisanej w binarnej notacji Zeckendorfa po dopisaniu zera na końcu?

Liczby Fibonacciego, co zostało odkryte po raz pierwszy przez Eulera w 1768 roku, spełniają zupełnie nieoczywistą rekurencję: $F_{n+1} = \varphi F_n + \hat{\varphi}^n$, gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$, a $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618\dots$. Ze względu na to, że $\hat{\varphi}^n$ dąży szybko do zera, możemy przyjąć, że każda liczba Fibonacciego o w miarę dużym indeksie jest w przybliżeniu φ razy większa od swojej poprzedniczki i błąd będzie tym mniejszy, im wyższy numer. Zwiększenie numeru liczby Fibonacciego o jeden odpowiada zatem mniej więcej przemnożeniu przez 1,618... Tymczasem jedna mila to około 1,609; prawie φ .





Jak zatem zamieniać mile na kilometry? Wystarczy znaleźć reprezentację Zeckendorfa danej liczby mil, a następnie zsumować liczby Fibonacciego o numerach o 1 wyższych. Przykładowo, jedziemy w Stanach Zjednoczonych samochodem i widzimy ograniczenie do 55 mil/h. Uśmiechamy się tylko, bo 55 to przypadkowo dziesiąta liczba Fibonacciego, więc tylko przeskakujemy do jedenastej, czyli 89 km/h. W rzeczywistości powinno wyjść 88,514, zatem błąd 0,486 to niespełna pół kilometra na godzinę. Idźmy dalej: inne częste ograniczenie 45 mil/h. Tym razem w pamięci rozkładamy 45 jako $34 + 8 + 3$ i przesuujemy indeksy z 34, robiąc 55, z 8 robiąc 13, a z 3 robiąc 5. Razem $55 + 13 + 5 = 73$ km/h. Tym razem błąd nieco większy: powinno wyjść 72,420, czyli dostaliśmy o 0,580 za dużo. Ale cały czas mieścimy się w granicach poniżej jedynek. Jak się okazuje, dla wszystkich liczb aż do 58 mil nie zrobimy błędu przekraczającego 1.

W drugą stronę analogicznie, tylko trzeba pomniejszać indeksy liczb Fibonacciego. Na przykład: ile mil to 100 kilometrów? Liczymy: $100 = 89 + 8 + 3$, więc bierzemy liczby Fibonacciego przesunięte w lewo: $55 + 5 + 2 = 62$ mile. W rzeczywistości powinno wyjść 62,137, więc tym razem błąd jest mały. Mieliśmy szczęście. Podobnie jak z milami, aż do 95 km podana konwersja nie oszuka nas o więcej niż 1. Przy czym stosujemy zasadę: zostawiamy ostatnią jedynekę rozwinięcia; przecież na lewo od jedynek F_2 jest jedynka F_1 .

Pozostaje nauczyć się liczb Fibonacciego na pamięć. Pamiętajmy:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1567, 2584, ...

Pewne uogólnienie prostej Eulera

*Chuong Chi NGUYEN**, *Hung Son NGUYEN**

Panuje przekonanie, że w niemodnej obecnie dziedzinie geometrii klasycznej wszystko jest znane i nie pozostało nic do odkrycia. Kłam temu stwierdzeniu zadaje dość ciekawe i (jeszcze) mało znane twierdzenie, które przedstawiamy w niniejszym artykule. Warto zaznaczyć, że środki, jakie posłużyły nam do dowodu, są czysto geometryczne i nie korzystają z narzędzi analitycznych. Aby ułatwić jego zrozumienie, przedstawiamy najpierw pewne pojęcia, definicje i bardziej znane fakty powiązane z tym zagadnieniem.

Definicja. Trójkątem spodkowym punktu P wewnątrz trójkąta ABC nazywamy trójkąt, którego wierzchołkami są rzuty prostokątne punktu P na boki trójkąta ABC .

Wykażemy teraz, że dla każdego trójkąta spodkowego można wskazać pewien „stowarzyszony” z nim trójkąt spodkowy.

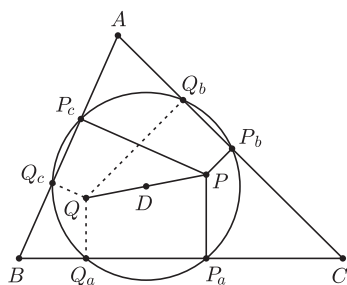
Lemat 1. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC , a $P_aP_bP_c$ jego trójkątem spodkowym. Okrąg opisany na trójkącie $P_aP_bP_c$ przecina boki BC , CA , AB dodatkowo w punktach Q_a, Q_b, Q_c . Wtedy $Q_aQ_bQ_c$ też jest trójkątem spodkowym dla pewnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta ABC .

Dowód. Niech D będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie $P_aP_bP_c$, a Q punktem symetrycznym do punktu P względem D . Z oczywistych powodów D należy do symetralnej odcinka P_aQ_a oraz PP_a jest prostopadły do BC , więc PP_aQ_aQ jest trapezem. To oznacza, że QQ_a jest prostopadły do BC . Analogicznie otrzymujemy, że QQ_b i QQ_c są prostopadłe odpowiednio do CA i AB . Inaczej mówiąc, $Q_aQ_bQ_c$ jest trójkątem spodkowym punktu Q względem trójkąta ABC . \square

Zauważmy, że na czworokątach CP_aPP_b , CQ_aQQ_b i $Q_aP_aP_bQ_b$ można opisać okręgi, a zatem

$$\sphericalangle PCP_b = \sphericalangle PP_aP_b = 90^\circ - \sphericalangle P_bP_aC = 90^\circ - \sphericalangle Q_aQ_bC = \sphericalangle QQ_bQ_a = \sphericalangle QCQ_a.$$

Analogicznie pokazujemy, że $\sphericalangle PAP_b = \sphericalangle QAQ_c$ i $\sphericalangle PBP_a = \sphericalangle QBQ_c$, co oznacza, że punkty P i Q są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC . Zauważmy też, że jeśli P nie jest środkiem okręgu wpisanego, to $P \neq Q$. Poniżej przedstawiamy pewną własność prostej przechodzącej przez punkty izogonalnie sprzężone w dowolnym trójkącie.



*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski