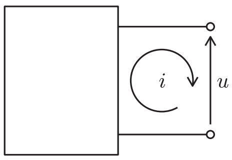
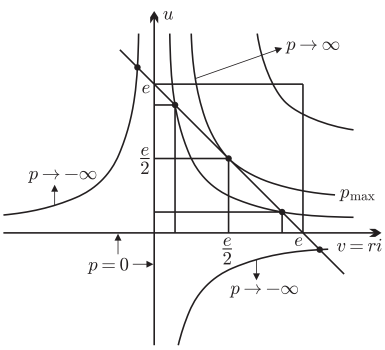
Złoty podział odcinka a ładowanie akumulatora samochodowego

*Maciej SIWCZYŃSKI**



Rys. 1



Rys. 2

Akumulator samochodowy jest jednym z wielu źródeł energii, jakie są używane w praktyce. Źródłami energii elektrycznej są również ogniwa, prądnice – maszyny prądu stałego, alternatory, turbogeneratory itd. Każde źródło energii elektrycznej możemy sobie wyobrazić jako „skrzynkę" dostępną z zewnątrz poprzez parę końcówek, zwanych też zaciskami, tworzących tzw. „port energetyczny" (rys. 1), na którym obserwuje się parę wielkości fizycznych nazywanych w technice **sygnałami**.

Dla źródła energii elektrycznej parę sygnałów stanowią napięcie elektryczne i natężenie prądu elektrycznego, które oznaczymy u oraz i. Iloczyn tych sygnałów stanowi moc chwilową:

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Na ogół zarówno u, i, jak i p, zależą od czasu, ale istnieje spora grupa źródeł energii, w których funkcje te są stałe w czasie (lub zmieniają się bardzo powoli) i dlatego nazywa się je źródłami napięcia (bądź prądu) stałego. Modele matematyczne takich źródeł są szczególnie proste, gdyż pomija się w nich zależność od czasu. Przykładami tego typu źródeł są ogniwa, prądnice prądu stałego, turbiny, ale również akumulatory samochodowe. Tymi ostatnimi zajmiemy się w tym artykule. Równanie opisujące akumulator, które wiąże ze sobą sygnały u – napięcie oraz i – natężenie prądu elektrycznego, ma postać

$$u + v = e,$$

gdzie e nazywa się „siłą elektromotoryczną" źródła, natomiast $v = ri$, gdzie r to tzw. opór wewnętrzny źródła. Równanie to na płaszczyźnie we współrzędnych (v, u) przedstawia prostą przechodzącą przez ćwiartki I, II i IV wyznaczoną przez punkty o współrzędnych $(0, e)$ i $(e, 0)$ (rys. 2). Pierwszy punkt nazywa się „punktem otwarcia" źródła – przy prądzie $i = 0$, drugi punkt to tzw. „punkt zwarcia" – przy $u = 0$. Napięcie elektryczne akumulatora przy $i = 0$ nazywa się napięciem otwarcia $u_o = e$, a prąd przy $u = 0$ – prądem zwarcia $i_z = \frac{e}{r}$.

Oprócz równania linii prostej we współrzędnych v, u występuje jeszcze jedno równanie energetyczne:

$$uv = pr,$$

gdzie p jest mocą wyprowadzaną z akumulatora. Jest to równanie hiperboli, która dla $p > 0$, gdy akumulator się rozładowuje, przechodzi tylko przez ćwiartkę I, a dla $p < 0$, gdy akumulator się ładuje, przez ćwiartki II i IV. Hiperbola ma wówczas dwie gałęzie, jak to widać na wykresie.

Wraz ze zmianą mocy p od $-\infty$ do $+\infty$ otrzymuje się całą rodzinę hiperbol. O tym, jaką wartość przyjmie moc p pobierana z akumulatora, decyduje czynnik zewnętrzny, czyli albo odbiornik energii, albo urządzenie ładujące źródło, przy czym własności akumulatora nakładają na możliwe wartości mocy pewne ograniczenia, których analizą się zajmiemy.

Rozpatrując proces pobierania energii z akumulatora, stawia się pytanie, kiedy moc p osiąga wartość maksimum. Poszukiwanie punktu maksimum p na wykresie polega na tym, aby spośród wszystkich prostokątów o bokach u, v opierających się o prostą $u + v = e$, czyli o tym samym obwodzie, wybrać ten, który będzie miał największe pole powierzchni. Oczywiste jest, że prostokąt ten musi być kwadratem. Jest to równoważne z tym, że funkcja

$$p(u) = \frac{1}{r}u(e - u)$$

osiąga maksimum w punkcie $u = \frac{e}{2}$. Punkt o współrzędnych

$$(u, v) = \left(\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right)$$

Rozwiązanie zadania M 1512.
Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Ponieważ K i N są środkami odcinków AB i AD, to $KN||BD$ oraz $2 \cdot KN = BD$. Podobnie otrzymujemy $LM||BD$ oraz $2 \cdot LM = BD$. W takim razie czworokąt $KLMN$ ma dwa boki równej długości i równoległe, więc jest równoległobokiem o środku S. Ponadto trójkąt ABD jest obrazem trójkąta AKN w jednokładności o środku A i skali 2, więc $[ABD] = 4 \cdot [AKN]$. Z analogicznych rozważań dla trójkątów BKL, CLM i DMN otrzymujemy

$$4 \cdot [AKN] + 4 \cdot [BKL] + 4 \cdot [CLM] + 4 \cdot [DMN] = [ADB] + [BAC] + [CBD] + [DCA] = 2 \cdot [ABCD].$$

Stąd mamy

$$[ABCD] = 2 \cdot [KLMN] = 8 \cdot [KLS].$$

Wiemy również, że

$$4 \cdot [BKL] = [BAC] \leqslant [ABCD].$$

W takim razie otrzymujemy

$$[KBLS] = [KBL] + [KLS] \leqslant \leqslant \frac{1}{4}[ABCD] + \frac{1}{8}[ABCD] = = \frac{3}{8}[ABCD]$$

oraz

$$[KBLS] \geqslant [KLS] = \frac{1}{8}[ABCD].$$

W takim razie

$$\frac{8}{3} \leqslant [ABCD] \leqslant 8.$$

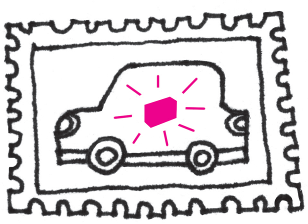
Minimum jest osiągane dla czworokąta (zdegenerowanego), w którym wierzchołki A, D i C są współliniowe (wówczas $[ABC] = [ABCD]$), a maksimum — gdy wierzchołki A, B i C są współliniowe (wówczas $[ABC] = 0$).

*Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska

nazywa się punktem dopasowania odbiornika energii do źródła (akumulatora). Współrzędne tego punktu wyznaczają wartość mocy maksymalnej otrzymywanej z akumulatora

$$p_{\max} = u_d i_d = \frac{1}{4} u_o i_z,$$

gdzie $u_d := \frac{u_z}{2} = \frac{e}{2}$, $i_d := \frac{i_z}{2} = \frac{e}{2r}$. Zagadnienie dopasowania odbiorników do źródeł energii jest obszernym problemem technicznym i teoretycznym wymagającym zaangażowania bardziej rozwiniętego aparatu matematycznego (rachunek wariacyjny, analiza funkcjonalna). Ten problem znacznie się upraszcza i nazywa się dopasowaniem odbiornika do źródła napięcia stałego ze względu na maksimum pobieranej z niego mocy. W tym celu na rysunku 2 wyróżniamy dwa kwadraty: duży kwadrat, tzw. „otwarciowo–zwarciowy", o polu powierzchni $u_o i_z$ równym „mocy otwarciowo–zwarciowej" i mały kwadrat o polu powierzchni równym ćwiartce pola dużego kwadratu, a wynoszącym $u_d i_d = \frac{1}{4} u_o i_z$. Ten mały można nazwać kwadratem mocy maksymalnej, ponieważ przez jeden z jego wierzchołków przechodzi hiperbola mocy maksymalnej styczna do prostej $u + v = e$. Położone wyżej hiperbole, odpowiadające mocom $p > p_{\max}$ nie mają punktów wspólnych z prostą napięciowo–prądową źródła, co oznacza, że akumulator nie jest w stanie dostarczyć takiej mocy. Liczba 4 staje się tym samym w teorii źródeł energii liczbą „magiczną".



Punkty przecięć prostej $u + v = e$ z hiperbolami rodziny $uv = pr$ są **punktami współpracy** akumulatora z odbiornikiem bądź źródłem ładowania. Prosta przecina hiperbole w dwóch punktach w ćwiartkach II i IV (ładowanie akumulatora) albo w dwóch punktach w ćwiartce I (rozładowanie), albo w jednym punkcie (dopasowanie), albo ich nie przecina, gdy $p > p_{\max}$. Ilustruje to rozwiązanie układu równań akumulatora $u + v = e$, $uv = pr$, który sprowadza się do równania kwadratowego dla napięcia lub prądu:

$$\left(\frac{u}{u_o}\right)^2 - \left(\frac{u}{u_o}\right) + \frac{x}{4} = 0 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{i}{i_z}\right)^2 - \left(\frac{i}{i_z}\right) + \frac{x}{4} = 0,$$

gdzie u_o, i_z – wcześniej zdefiniowane napięcie otwarcia i prąd zwarcia akumulatora, a

$$x = \frac{p}{p_{\max}}$$

jest tzw. ułamkiem obciążenia źródła. Stosunek ten nie może przekroczyć wartości 1, gdyż w przeciwnym razie otrzymywalibyśmy z akumulatora więcej mocy, niż jest on w stanie dostarczyć. Matematycznie oznaczałoby to, że wyróżnik równań kwadratowych $\Delta = 1 - x$ byłby ujemny i równania te nie miałyby rzeczywistych rozwiązań. Jednak dla ujemnych x nie ma żadnego ograniczenia od dołu, może z wyjątkiem ograniczeń wynikających z wytrzymałości akumulatora na przeciążenie prądem lub napięciem. Ujemna wartość x odpowiada procesowi ładowania akumulatora z zewnętrznego źródła energii elektrycznej.

Przyjmijmy, że $x = -4$ (magiczne minus 4) co oznacza, że akumulator ładowany jest z mocą równą polu powierzchni dużego kwadratu otwarciowo–zwarciowego. Wówczas równania kwadratowe przyjmą wspólną postać

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0,$$

a to jest równanie złotego podziału! Jednym z rozwiązań tego równania jest liczba opisująca złoty podział (ϕ – symbol Fidiasza):

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1{,}618034.$$

Drugim rozwiązaniem równania kwadratowego jest $-\phi^{-1}$, otrzymujemy więc dwa rozwiązania, którym odpowiadają następujące wartości prądu i napięcia:

$$\begin{matrix} \dfrac{u}{u_o} = \phi & & \dfrac{i}{i_z} = 1 - \phi = -\phi^{-1} \\ & \rightarrow & \\ \dfrac{u}{u_o} = -\phi^{-1} & & \dfrac{i}{i_z} = 1 + \phi^{-1} = \phi \end{matrix}$$

Rozwiązanie zadania F 916.
Ze względu na ogromną odległość do Słońca soczewka skupiająca wytworzy jego obraz w odległości praktycznie równej jej ogniskowej f. Średnica obrazu będzie równa $d = 2f \cdot \mathrm{tg}(\alpha/2)$ i na krążku o tej średnicy zostanie skupiona cała moc padająca na powierzchnię soczewki – niech średnica soczewki wynosi D. Drewno ma małe przewodnictwo cieplne, przyjmijmy więc w grubym przybliżeniu, że głównym mechanizmem utraty ciepła z jego powierzchni będzie promieniowanie termiczne. Temperatura T powierzchni ustali się, gdy moc docierająca od Słońca na powierzchnię obrazu po skupieniu przez soczewkę będzie równa mocy wypromieniowanej przez powierzchnię obrazu. Mamy więc równanie:

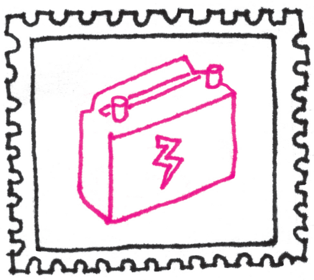
$$\pi \frac{D^2}{4} W = \pi \frac{d^2}{4} \sigma T^4,$$

które pozwala nam obliczyć wartość temperatury obrazu Słońca. Warunkiem zapłonu jest $T > T_0 = (300 + 273)$ K. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{D^2}{f^2} > 4\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma T_0^4}{W}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy warunek $D/f > 0{,}022$. W naszych obliczeniach, poza przewodnictwem ciepła w drewnie, pominęliśmy straty energii podczas przechodzenia promieniowania przez materiał soczewki oraz straty wynikające ze zjawiska konwekcji w powietrzu i wad optycznych soczewki (aberracja sferyczna i chromatyczna). Rzeczywisty stosunek D/f pozwalający za pomocą soczewki zapalić drewno jest z tych powodów 3 do 4 razy większy, niż to wynika z naszego oszacowania.

Punkty o tych współrzędnych leżą w ćwiartkach II i IV, co widać na rysunku 2. Korzystniejszą technicznie jest pierwsza para wartości ze względu na mniejszą wartość bezwzględną prądu ładowania (punkt w ćwiartce II). Zatem napięcie ładowania akumulatora u powinno być takie, aby $\frac{u}{u_o} = \phi$, co przy $u_o = e = 12$ V daje wartość około 19,416408 V („złote napięcie ładowania”). Warto zauważyć, że prąd ładowania odpowiadający „złotemu napięciu” jest dosyć duży i wynosi $-\phi^{-1} i_z \approx -0{,}618034 \cdot i_z$ (i_z – prąd zwarcia). Nie jest to więc prąd mały, zważywszy, że prąd zwarcia płynący przez akumulator długotrwale może go uszkodzić. Badanie właściwości ładowania akumulatorów złotym napięciem bądź złotym prądem wymagałoby analizy wielu zjawisk fizykochemicznych, dynamicznych, cieplnych, itd. zachodzących w akumulatorze podczas ładowania. Autor w tym artykule nie podejmuje dyskusji na ten temat. Tutaj ograniczymy się do wyciągnięcia następującego wniosku sformułowanego w postaci twierdzenia:



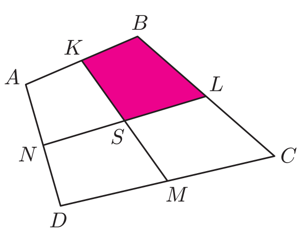
Napięcie (bądź prąd) ładowania akumulatora z mocą równą iloczynowi napięcia otwarcia i prądu zwarcia, równą czterokrotnej mocy maksymalnej – czyli równą polu powierzchni dużego kwadratu otwarciowo–zwarciowego – równe są ϕ bądź $-\phi^{-1}$ (złotej liczbie lub jej odwrotności) jednostek napięcia (lub prądu).

Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1510. Z koła ω losujemy 11 punktów (przy losowaniu każdy punkt koła jest jednakowo prawdopodobny). Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że istnieje taka średnica koła ω, iż wszystkie wylosowane punkty leżą po tej samej jej stronie.
Rozwiązanie na str. 7

M 1511. Znaleźć wszystkie liczby całkowite n, dla których liczba $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 23



M 1512. Punkty K, L, M i N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD i DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S. Znaleźć kres dolny i górny pola czworokąta $ABCD$ przy założeniu, że pole czworokąta $KBLS$ jest równe 1.
Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 915. Znajdź postać zależności prędkości c fali od jej długości λ dla fal na powierzchni głębokiego zbiornika nieściśliwej cieczy – to znaczy gdy głębokość zbiornika $h \gg \lambda$ – w przypadku, gdy źródłem sił przywracających płaskość powierzchni jest:

a) napięcie powierzchniowe,
b) ciężar cieczy.

Ciecz ma gęstość ρ, współczynnik napięcia powierzchniowego ciecz-powietrze σ, a przyspieszenie siły ciężkości wynosi g.
Rozwiązanie na str. 2

F 916. Oszacuj parametry soczewki skupiającej, którą można zapalić drewnianą drzazgę. Przyjmij, że temperatura zapłonu drewna wynosi około 300°C. W bezchmurny dzień na powierzchnię Ziemi dociera około $W = 1$ kW/m^2 mocy promieniowania słonecznego; stała Boltzmanna to $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4). Rozmiary kątowe tarczy słonecznej widzianej z Ziemi wynoszą około $\alpha = 0{,}5°$.
Rozwiązanie na str. 13