Stożki i walce

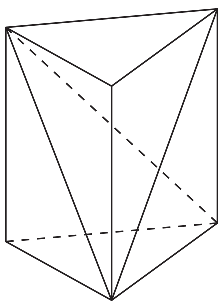
*Jarosław GÓRNICKI**

*Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Od Archimedesa wiemy, że zdaniem Demokryta *stożek stanowi trzecią część walca*, ale pierwszy udowodnił to Eudoksos. Znamy ten rezultat z XII Księgi *Elementów* Euklidesa (Stwierdzenie 10). Euklides, korzystając z metody wyczerpywania (wyjmując graniastosłupy o znanej objętości), pokazał, że ostrosłup o podstawie trójkątnej ma objętość, którą wyraża wzór

$$(*) \qquad \textit{stała} \cdot \text{pole podstawy} \cdot \text{wysokość}.$$

Stałą wyznaczył z obserwacji: ostrosłup stanowi trzecią część opisanego na nim graniastosłupa (rys. 1). Może Euklides chciał w ten sposób uniknąć korzystania z przejść granicznych przy wyznaczaniu stałej we wzorze $(*)$ lub potwierdzić jej wartość na innej drodze? Następnie, przybliżając stożek ostrosłupami, uzasadnił twierdzenie Eudoksosa.



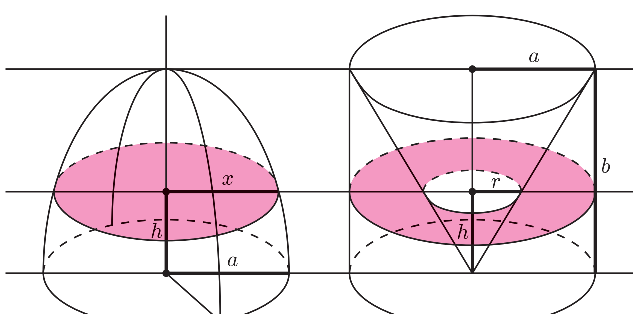
Rys. 1

Czy we wzorze na objętość stożka, który również jest postaci $(*)$, można potwierdzić wartość stałej bez ponownego odwoływania się do przejść granicznych? W *Elementach* takiej informacji nie ma. My pokażemy, że jest to możliwe. Wykorzystamy pomysły Archimedesa sprzed 2200 lat.

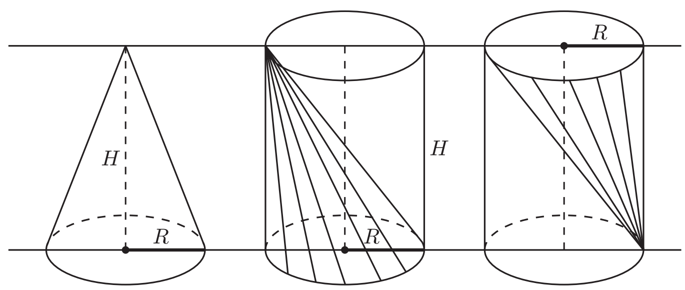
Gdy weźmiemy elipsę o półosiach a, b i obrócimy ją wokół pionowej osi b, to otrzymamy bryłę − *elipsoidę obrotową*. Rozważmy z jednej strony górną połowę takiej elipsoidy opartą na kole o promieniu a, zaś z drugiej strony walec o wysokości b, którego podstawą jest koło o promieniu a (rys. 2).

Archimedes zauważył, że jeśli z tego walca wytniemy stożek i obie bryły przetniemy wspólną płaszczyzną równoległą do podstawy na wysokości h $(0 \leqslant h \leqslant b)$, to pola otrzymanych przekrojów zawsze będą równe. Dla elipsoidy, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$, więc $x^2 = a^2\big(1 - \frac{h^2}{b^2}\big)$. Zatem pole przekroju elipsoidy jest równe $\pi x^2 = \pi a^2\big(1 - \frac{h^2}{b^2}\big)$. Ponieważ dla drugiej figury $\frac{r}{a} = \frac{h}{b}$, więc $r = a \cdot \frac{h}{b}$ i pole pierścienia jest równe $\pi a^2 - \pi r^2 = \pi a^2\big(1 - \frac{h^2}{b^2}\big)$. Zatem objętość połowy elipsoidy obrotowej jest równa objętości opisanego na niej walca pomniejszonej o objętość wydrążonego w nim stożka. Warto również zaznaczyć, że gdy $a = b$, to z tych rozważań wynika wzór na objętość kuli: $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Rozważmy teraz walec o wysokości H, którego podstawą jest koło o promieniu R. Objętość tego walca jest równa $\pi R^2 H$. W tym walcu umieszczamy dwa stożki, każdy o wysokości H i podstawach będących podstawami walca (rys. 3).



Rys. 2

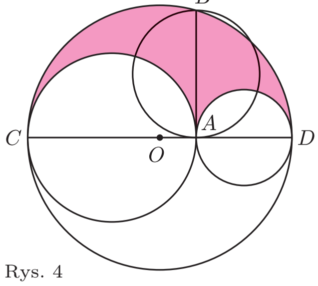


Rys. 3

Stożki te mają taką samą objętość. Nie wypełniają one objętości walca. Gdy taki walec przetniemy na wysokości h $(0 \leqslant h \leqslant H)$ płaszczyzną równoległą do jego podstaw, to naszym oczom ukaże się widok przedstawiony na rysunku 4. Kolorowy obszar S ma pole równe polu koła o średnicy AB (to również wiedział Archimedes):

$$|S| = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{CA}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(CD^2 - CA^2 - AD^2) =$$

$$= \frac{1}{8}\big((CA + AD)^2 - CA^2 - AD^2\big) = \frac{\pi}{4} \cdot CA \cdot AD = \frac{\pi}{4} \cdot AB^2 = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$



Rys. 4

Pole to jest największe (równe $\pi(\frac{R}{2})^2$), gdy przecięcie jest w połowie wysokości walca i maleje, gdy cięcia przesuwają się w górę albo w dół. Oznacza to, że

Rozwiązanie zadania M 1510.
Ponieważ prawdopodobieństwo wylosowania dwóch punktów leżących na tej samej średnicy koła ω jest równe zeru, możemy założyć, że taka sytuacja się nie zdarzyła.

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ będą pewnymi punktami koła ω, a $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$ – punktami symetrycznymi do nich względem środka koła. Rozważmy 2^{11} sytuacji, w których dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 11$ i-tym wylosowanym punktem jest A_i lub B_i. Wśród nich jest $2 \cdot 11$ takich przypadków, w których wylosowane punkty leżą po jednej stronie pewnej średnicy koła ω – każdy odpowiada wyborowi pewnego punktu spośród wyróżnionych oraz 10 „kolejnych" zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

czwarta część objętości walca leżąca poza stożkami może być przedstawiona jako połowa elipsoidy obrotowej o wysokości $H/2$ mającej w podstawie koło o promieniu $R/2$. Aby się o tym przekonać, wystarczy wyznaczyć zależność długości odcinka AB od odległości między płaszczyzną tnącą a płaszczyzną połowiącą walec. Można również przekształcić odcinek OC na odcinek o długości $H/2$ przez powinowactwo prostokątne. Takie przekształcenie łuk okręgu przeprowadza w łuk elipsy. Dzięki temu otrzymujemy „równanie objętości brył":

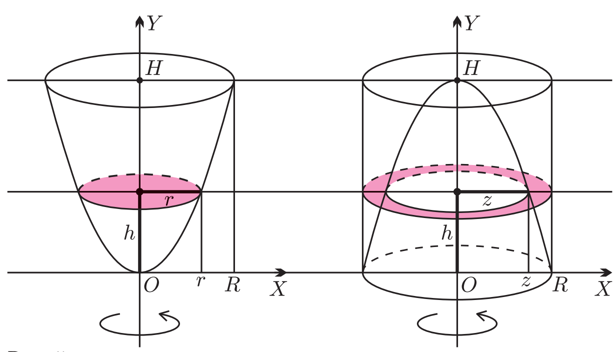
$$\text{walec}(R,H) = \text{stożek}(R,H) + \text{stożek}(R,H) + 4 \cdot \text{pół elipsoidy}\,(R/2, H/2) =$$
$$= \text{stożek}(R,H) + \text{stożek}(R,H) + 4\,[\text{walec}\,(R/2,H/2) - \text{stożek}\,(R/2,H/2)]\,,$$

gdzie $\text{stożek}(R,H) = k \cdot \pi R^2 H$ i niewiadomą jest k. Przekształcając powyższe równanie do postaci

$$\pi R^2 H = k\pi R^2 H + k\pi R^2 H + 4[\pi\,(R/2)^2\,(H/2) - k\pi\,(R/2)^2\,(H/2)],$$

otrzymujemy $k = 1/3$. Mamy więc potwierdzenie, że stożek o wysokości H, mający w podstawie koło o promieniu R, ma objętość równą $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Spróbujemy teraz wyznaczyć objętość paraboloidy obrotowej o wysokości H i promieniu podstawy R. Oczywiście, nie chcemy używać rachunku całkowego. Równanie paraboli tworzącej paraboloidę obrotową o promieniu podstawy R i wysokości H jest następujące: $y = \frac{H}{R^2}x^2$ (rys. 5; taka parabola jest jedyna!). Obok rozważmy walec o wysokości H, którego podstawą jest koło o promieniu R, w którym wydrążono paraboloidę obrotową utworzoną przez parabolę $y = H - \frac{H}{R^2}x^2$. W wyniku przecięcia obu brył na wysokości h $(0 \leqslant h \leqslant H)$ płaszczyzną równoległą do podstawy otrzymujemy koło o polu $S(h) = \pi r^2 = \pi\frac{R^2 h}{H}$ (korzystamy z równania paraboli $h = \frac{H}{R^2}r^2$).



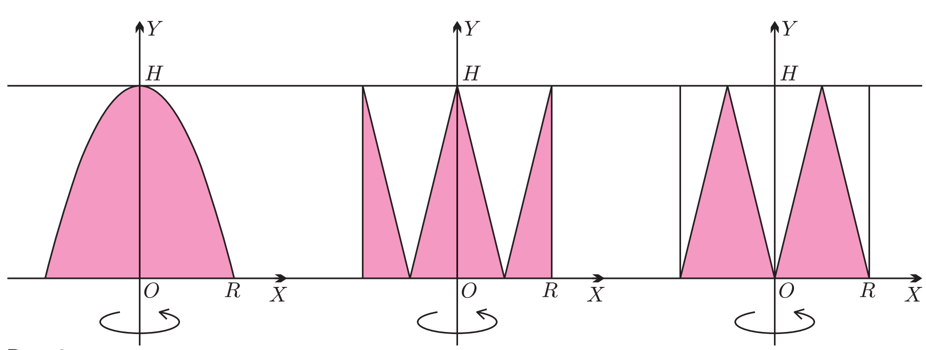
Rys. 5

Ponieważ dla pierścienia mamy $h = H - \frac{H}{R^2}z^2$, więc

$$P(h) = \pi R^2 - \pi z^2 = \pi\frac{R^2 h}{H} = S(h).$$

Oznacza to, że objętość paraboloidy obrotowej jest równa połowie objętości opisanego na niej walca: $\frac{1}{2}\pi R^2 H$.

Miłośnikom rachunków polecam inne rozwiązanie: można bez trudu sprawdzić, że na rysunku 6 kolorowe obszary obrócone wokół osi OY wyznaczają w przestrzeni bryły o równych objętościach.



Rys. 6

Ciekawe, czy Euklides byłby zadowolony z takiego rozwiązania…