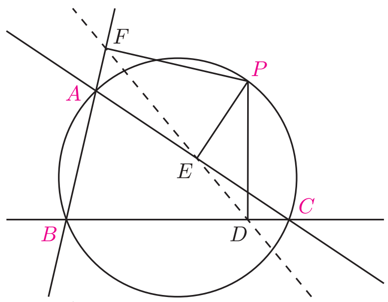
O własnościach prostej Simsona

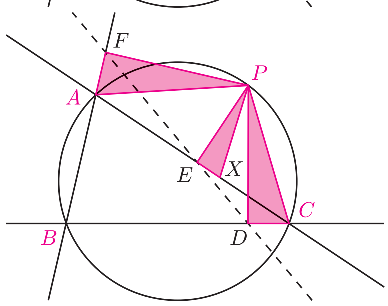
*Dominik BUREK**
*Tomasz CIEŚLA***

*student, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
**student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W niniejszym artykule przybliżymy własności jednej z najsłynniejszych prostych w geometrii euklidesowej – prostej Simsona. Jej odkrycie przypisywane jest szkockiemu matematykowi, Robertowi Simsonowi, choć w żadnej jego pracy nie znajdujemy wzmianki o niej.

Twierdzenie 1 (Simson)**.** *Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz punkt P leżący na tym okręgu. Rzuty prostokątne punktu P na proste BC, CA, AB oznaczmy odpowiednio przez D, E, F. Wówczas punkty D, E, F leżą na jednej prostej. Prosta ta nazywana jest* ***prostą Simsona punktu*** *P* ***względem trójkąta*** *ABC.*





Dowód. Zauważmy, że trójkąty prostokątne PAF i PCD są podobne. Rzeczywiście, wynika to z równości $\sphericalangle PAF = \sphericalangle PCD$, która jest konsekwencją tego, że punkty A, B, C, P leżą na jednym okręgu. Jest też jasne, że trójkąty te są tak samo zorientowane. Obierzmy na prostej AC taki punkt X, że trójkąt PXE jest podobny do trójkąta PAF i tak samo zorientowany. Przekształcenie będące złożeniem obrotu o kąt APF z jednokładnością o skali $\frac{PF}{PA}$ przeprowadza punkty A, X, C odpowiednio na punkty F, E, D. Ponieważ obroty i jednokładności zachowują współliniowość punktów, więc ze współliniowości punktów A, X, C wynika współliniowość punktów F, E, D. □

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: jeśli punkty D, E, F są współliniowe, to punkt P leży na okręgu ω. Dowód tego faktu jest dość podobny, nietrudno bowiem sprawdzić, że przy takich założeniach obrót o kąt FPA z jednokładnością o skali $\frac{PA}{PF}$ przeprowadzi D na C, skąd wnioskujemy podobieństwo trójkątów PAF i PCD oraz tezę twierdzenia odwrotnego.

Jedno z ciekawych uogólnień prostej Simsona polega na rzutowaniu punktu P pod dowolnym (ustalonym) kątem. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω i punkt P leżący na nim. Niech D, E, F będą takimi punktami odpowiednio na prostych BC, CA, AB, że zachodzą równości kątów skierowanych $\sphericalangle(PD, BC) = \sphericalangle(PE, CA) = \sphericalangle(PF, AB)$. Wówczas punkty D, E, F leżą na jednej prostej. Twierdzenie odwrotne również jest prawdziwe.*

Kąt skierowany $\sphericalangle(a, b)$ między prostymi a, b to kąt, o jaki należy obrócić prostą b przeciwnie do ruchu wskazówek zegara tak, aby stała się ona równoległa do prostej a.

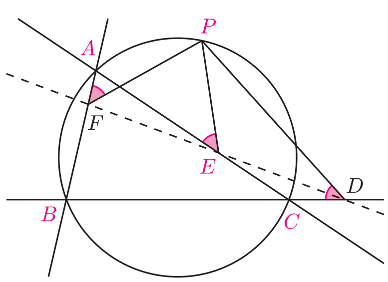
Powyższe twierdzenie można udowodnić, wykorzystując analogiczny argument jak w twierdzeniu Simsona. Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi.

Inne uogólnienie twierdzenia Simsona można otrzymać, badając pola trójkątów o wierzchołkach będących rzutami dowolnego punktu płaszczyzny. Francuz Joseph Gergonne odkrył i jako pierwszy udowodnił poniższy fakt.

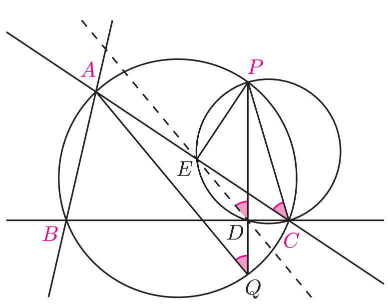
Zorientowane pole trójkąta ABC jest: dodatnie, gdy wędrując wzdłuż łamanej $ABCA$, poruszamy się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara; ujemne, gdy poruszamy się zgodnie z ruchem wskazówek zegara; zerowe, gdy punkty A, B, C są współliniowe.

Twierdzenie 3. *Dane są trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku O oraz liczba rzeczywista λ. Dla dowolnego punktu P oznaczmy jego rzuty na proste BC, CA, AB przez D, E, F. Zbiór punktów P, dla których zorientowane pole trójkąta DEF wynosi λ, jest albo zbiorem pustym, albo jednoelementowym zbiorem zawierającym punkt O, albo pewnym okręgiem o środku O.*

Dowód powyższego twierdzenia pominiemy, natomiast wywnioskujemy z niego twierdzenie Simsona. Przyjmując $\lambda = 0$, otrzymujemy, że wszystkie punkty, których rzuty na proste BC, CA, AB są współliniowe, tworzą pewien okrąg. Nietrudno przekonać się, że rzuty punktów A, B, C mają tę własność. Wobec tego okręgiem tym musi być okrąg opisany na trójkącie ABC.



Zanim przejdziemy do próby pokazania ciekawych zastosowań prostej Simsona, udowodnimy kilka interesujących faktów z nią związanych. Zaczniemy od niezwykle użytecznego faktu:



Fakt 1. *Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω oraz cięciwa PQ prostopadła do prostej BC. Wówczas prosta Simsona punktu P względem trójkąta ABC jest równoległa do prostej AQ.*

Dowód. Oznaczmy rzuty punktu P na proste BC i CA odpowiednio przez D i E. Punkty D i E leżą na okręgu o średnicy PC. Korzystając z tego, że kąty oparte na tym samym łuku są równe, otrzymujemy $\sphericalangle PDE = \sphericalangle PCE = \sphericalangle PQA$, skąd wynika równoległość prostych AQ i DE. □

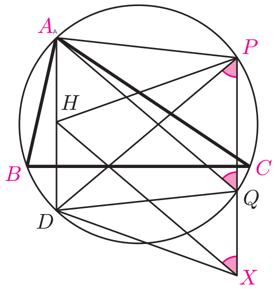
Może się, oczywiście, zdarzyć, że nie istnieje cięciwa przechodząca przez P, która jest prostopadła do BC. Dzieje się tak dokładnie wtedy, gdy P jest jednym z końców średnicy równoległej do BC. W takim przypadku należy przyjąć $P = Q$ i fakt pozostaje w mocy. Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi.

Na szczególną uwagę zasługuje piękna zależność znaleziona przez szwajcarskiego matematyka Jakoba Steinera, która wiąże prostą Simsona z ortocentrum trójkąta.

Twierdzenie 4 (Steiner)**.** *Punkt P leży na okręgu ω opisanym na trójkącie ABC. Punkty X, Y i Z są obrazami punktu P w symetrii względem boków odpowiednio BC, CA i AB. Wówczas punkty X, Y i Z leżą na jednej prostej, która zawiera ortocentrum trójkąta ABC. Prostą tę zwykło się nazywać* ***prostą Steinera punktu*** P ***względem trójkąta*** ABC.

Dowód. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC i niech Q będzie takim punktem na ω, że $PQ \perp BC$. Oznaczmy odbicie H względem BC przez D. Wówczas

$$\begin{aligned}\sphericalangle BDC = \sphericalangle BHC = 180° - \sphericalangle HCB - \sphericalangle CBH &= \\ = (90° - \sphericalangle HCB) + (90° - \sphericalangle CBH) &= \\ = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle BAC&,\end{aligned}$$



zatem D leży na ω. Trapez $HDXP$ jest równoramienny (jego osią symetrii jest prosta BC), wobec tego $\sphericalangle PXH = \sphericalangle DPX$. Z drugiej strony trapez $ADQP$ jest wpisany w okrąg, więc również jest równoramienny. Stąd $\sphericalangle DPQ = \sphericalangle PQA$. Z powyższych dwóch równości wynika, że $HX \parallel AQ$. Stąd i z poprzedniego faktu wnioskujemy, że prosta HX jest równoległa do prostej Simsona punktu P. Innymi słowy, punkt X leży na prostej ℓ przechodzącej przez H i równoległej do prostej Simsona punktu P. Dokładnie ten sam argument pokazuje, że punkty Y, Z również leżą na ℓ. □

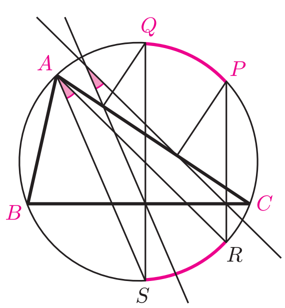
Podobnie jak poprzednio, może się zdarzyć, że punkt Q nie będzie istniał. Twierdzenie Steinera pozostaje prawdziwe również w tym przypadku. Uzupełnienie szczegółów ponownie pozostawiamy Czytelnikowi.

W dowolnym trójkącie spodki wysokości, środki boków oraz środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami leżą na jednym okręgu. Okrąg ten jest nazywany okręgiem dziewięciu punktów trójkąta ABC.

Twierdzenie Steinera można przeformułować tak: jednokładność o środku w punkcie P i skali równej 2 przeprowadza prostą Simsona punktu P na prostą zawierającą ortocentrum trójkąta ABC. Wypływa stąd wniosek: prosta Simsona punktu P leżącego na okręgu opisanym na trójkącie ABC połowi odcinek PH, gdzie H jest ortocentrum trójkąta ABC. Ponadto środek odcinka PH leży na okręgu dziewięciu punktów trójkąta ABC. Aby to uzasadnić, wystarczy zauważyć, że skoro odbicia H względem boków trójkąta ABC leżą na okręgu opisanym, to okrąg dziewięciu punktów jest jednokładny względem H w skali $\frac{1}{2}$ z okręgiem opisanym.

Można również badać relację między dwiema wybranymi prostymi Simsona.

Twierdzenie 5. *Punkty P i Q leżą na okręgu ω opisanym na trójkącie ABC. Wówczas miara kąta między prostymi Simsona punktów P i Q jest równa mierze kąta wpisanego opartego na łuku PQ.*



Dowód. Obierzmy punkty R i S na ω tak, by cięciwy PR, QS były prostopadłe do prostej BC. Wówczas proste AR, AS są równoległe do prostych Simsona punktów P, Q. Wobec tego interesujący nas kąt równy jest kątowi między prostymi AR, AS. Ten kąt jest oparty na łuku RS, którego długość jest równa długości łuku PQ. □

Tutaj również może zdarzyć się, że nie istnieją cięciwy PR, QS prostopadłe do prostej BC – uzupełnienie dowodu w tym przypadku pozostawiamy Czytelnikowi.

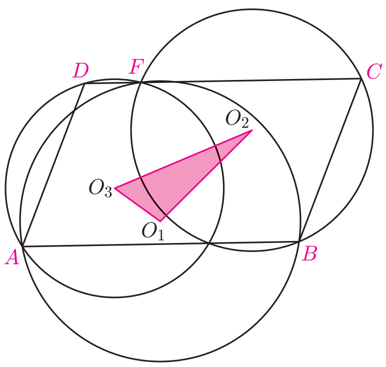
Z powyższych faktów w prosty sposób można wysnuć następujące wnioski:

- Trójkąt XYZ jest wpisany w okrąg opisany na trójkącie ABC. Wówczas proste Simsona punktów X, Y i Z względem trójkąta ABC ograniczają trójkąt podobny do trójkąta ABC.
- Proste Simsona dwóch punktów antypodycznych przecinają się pod kątem prostym.

- W trójkącie ABC zbiór punktów przecięcia się prostych Simsona dwóch punktów antypodycznych jest jego okręgiem dziewięciu punktów.

Nadszedł czas na pokazanie zastosowań prostej Simsona w zadaniach olimpijskich. Część poniższych problemów pochodzi z olimpiad matematycznych o zasięgu międzynarodowym.

Zadanie 1. *Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt F leżący na odcinku CD. Punkty O_1, O_2 i O_3 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABF, BCF i ADF. Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej AB.*

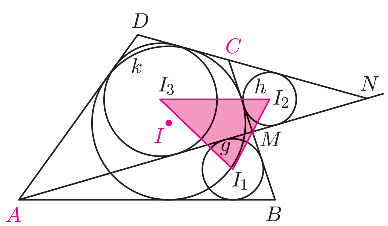


Rozwiązanie. Pokażemy najpierw, że punkty F, O_1, O_2, O_3 leżą na jednym okręgu. Istotnie,

$$\begin{aligned}\sphericalangle O_3FO_2 &= 180^\circ - \sphericalangle DFO_3 - \sphericalangle O_2FC = \\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle DAF) - \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle CBF) = \\ &= \sphericalangle DAF + \sphericalangle CBF = \sphericalangle AFB = 180^\circ - \sphericalangle O_2O_1O_3.\end{aligned}$$

(ostatnia równość wynika z faktu, że proste O_1O_2 i O_1O_3 są prostopadłe odpowiednio do FB i FA). Na podstawie twierdzenia Steinera pozostaje uzasadnić, że odbicia punktu P względem boków trójkąta $O_1O_2O_3$ leżą na prostej AB, jednakże jest to oczywiste, gdyż proste O_3O_1 oraz O_2O_1 są symetralnymi odcinków odpowiednio AF i FB. □

Zadanie 2. *W czworokącie $ABCD$ opisanym na okręgu prosta l przechodząca przez wierzchołek A przecina bok BC w punkcie M oraz półprostą $DC^{\rightarrow}$ w punkcie N. Punkty I_1, I_2, I_3 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABM, MNC, NDA. Dowieść, że punkt przecięcia wysokości trójkąta $I_1I_2I_3$ leży na prostej l.*



Rozwiązanie. Niech prosta l przecina półprostą $DC^{\rightarrow}$ w punkcie N. Trójki punktów I_1, M, I_2 oraz I_3, I_2, M są, oczywiście, współliniowe. Oznaczmy przez E przecięcie prostych AM i drugiej stycznej poprowadzonej z punktu C do okręgu o środku w punkcie I_1. Łatwo zauważyć, że $CE + AB = AE + BC$, więc $AE - CE = AB - BC = AD - CD$. Oznacza to, że półprosta CE jest również styczna do okręgu o środku w punkcie I_3, stąd punkty I_1, E i I_3 są współliniowe. Wobec tego

$$\sphericalangle I_1CI_3 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle DCB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle MCN) = \sphericalangle NMI_2 + \sphericalangle I_2NM = \sphericalangle I_1I_2I_3,$$

więc na czworokącie $I_1I_2CI_3$ można opisać okrąg. Aby dokończyć rozwiązanie, wystarczy zauważyć, że obrazy punktu C w symetrii względem prostych I_1I_2 oraz I_2I_3 leżą na prostej l i zastosować twierdzenie Steinera. □

Rozważane zadania szybko uległy twierdzeniu Steinera. Tak dzieje się z wieloma problemami dotyczącymi przynależności ortocentrum trójkąta do jakiejś prostej. Dla Czytelników Wnikliwych pozostawiamy kilka zadań, które pomogą zgłębić i odkryć jeszcze więcej własności prostej Simsona.

Zadanie 3. *Dane są punkty A, B, C, D, E, takie, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, a czworokąt $BCED$ jest wpisany w okrąg. Prosta l przechodząca przez A przecina wnętrze odcinka CD w punkcie F, a prostą BC w punkcie G. Przypuśćmy, że $EF = EG = EC$. Wykazać, że l jest dwusieczną kąta DAB.*

Zadanie 4. *Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω. Punkt $K \in \omega$ i punkt A leżą po przeciwnych stronach prostej BC. Punkty L, M są odbiciami punktu K względem AB, BC. Okrąg przechodzący przez punkty B, L, M przecina ω po raz drugi w punkcie E. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Wykazać, że proste KH, EM, BC mają punkt wspólny.*

Zadanie 5. *W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Punkt F jest punktem Feuerbacha trójkąta ABC. Wówczas prosta Simsona punktu P względem trójkąta DEF jest równoległa do prostej OI, która łączy środki O i I – okręgów opisanego i wpisanego trójkąta ABC.*

W każdym trójkącie okrąg wpisany jest styczny do okręgu dziewięciu punktów. Ich punkt wspólny nazywany jest punktem Feuerbacha.