Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

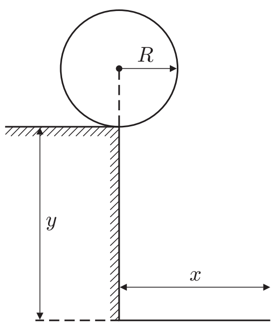
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2017

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 626, 627

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



626. Na skraju prostokątnego uskoku o wysokości h (rysunek) leży jednorodna kula o promieniu R, przy czym $h > \frac{R}{3}$. W stanie początkowym kula znajduje się w stanie równowagi chwiejnej. Znaleźć odległość x miejsca upadku kuli na ziemię, zakładając, że jej ruch rozpoczął się z zerową prędkością początkową. Nie ma tarcia między kulą a uskokiem.

627. W pionowo ustawionym cylindrze z tłokiem znajduje się jednoatomowy gaz doskonały. Odległość tłoka od dna cylindra wynosi l. Po obciążeniu tłoka ciężarkiem o masie m i ustaleniu się równowagi temperatura bezwzględna gazu wzrosła dwukrotnie. Cylinder i tłok wykonane są z izolatora cieplnego. Obliczyć przyrost energii wewnętrznej gazu. Pominąć tarcie między cylindrem a tłokiem.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 614 ($WT = 1{,}77$), 615 ($WT = 2{,}33$) 616 ($WT = 2{,}88$), 617 ($WT = 1$) 618 ($WT = 1{,}78$) i 619 ($WT = 2{,}2$) z numerów 3, 4, 5/2016

Michał Koźlik	Poznań	39,15
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,47
Jacek Konieczny	Poznań	29,51
Jan Zambrzycki	Białystok	28,76
Ryszard Woźniak	Kraków	26,62
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22

Zadania z matematyki nr 729, 730

Redaguje Marcin E. KUCZMA

729. W trójkącie ABC bok AC jest dłuższy niż BC. Punkt P leży na dwusiecznej CK kąta C, zaś punkt Q leży na środkowej CM, połowiącej bok AB; przy tym $MP \| AC$ oraz $KQ \| BC$. Wykazać, że odcinek PQ jest prostopadły do CK.

730. Wyznaczyć kres dolny zbioru liczb postaci $n\{n\sqrt{2}\}$, gdy $n = 1, 2, 3, \ldots$ (tradycyjne oznaczenie: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).

Zadanie 730 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 719 ($WT = 2{,}50$) i 720 ($WT = 1{,}50$) z numeru 4/2016

Janusz Olszewski	Warszawa	46,14
Janusz Fiett	Warszawa	44,74
Paweł Kubit	Kraków	43,02
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Piotr Kumor	Olsztyn	38,15
Marek Gałecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,90
Witold Bednarek	Łódź	33,95

Obaj zdobywcy premii 44, obaj o imieniu Janusz – nie pierwszy raz w tej roli. Pan Fiett po raz drugi. Pan Olszewski po raz siedemnasty. Przy następnej liczbie Fermata poświęcimy chyba cały numer temu wydarzeniu.

Rozwiązanie zadania M 1511. Zauważmy, że $n = 0$ spełnia warunki zadania i załóżmy teraz, że $n \neq 0$. Wówczas

$$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 < n^4 + n^3 + \frac{9}{4}n^2 + n + 1 = \left(n^2 + \frac{1}{2}n + 1\right)^2$$

oraz

$$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 > n^4 + n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(n^2 + \frac{1}{2}n\right)^2,$$

przy czym druga nierówność wynika z tego, że

$$\frac{3}{4}n^2 + n + 1 = \frac{3}{4}\left(n + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0.$$

W takim razie pierwiastek z liczby $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ leży wewnątrz przedziału $\left(n^2 + \frac{1}{2}n; n^2 + \frac{1}{2}n + 1\right)$ długości 1. Jeśli n jest liczbą parzystą, to końce przedziału są liczbami całkowitymi i n nie może spełniać warunków zadania. W przeciwnym razie wewnątrz przedziału leży dokładnie jedna liczba całkowita $n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$. Pozostaje sprawdzić, dla jakich liczb n zachodzi równość

$$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = \left(n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Równanie to upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4},$$

co daje rozwiązania $n = 3$ i $n = -1$. Łatwo sprawdzić, że obie te liczby spełniają warunki zadania.