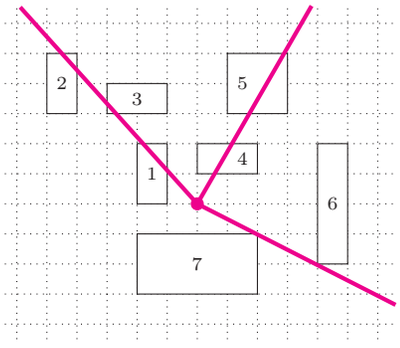
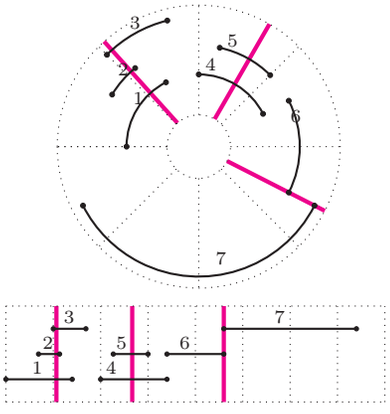
Informatyczny kącik olimpijski (99): Kosmita



Rys. 1. W mieście znajduje się siedem budynków. Aby zniszczyć je wszystkie, wystarczy, że kosmita użyje działa trzy razy.

W listopadowym kąciku omawiamy zadanie *Kosmita* z Internetowych Mistrzostw Polski w Programowaniu z roku 2006. Zgodnie z treścią zadania tym razem nie będziemy ratowali świata, ale mamy pomóc kosmicie, który wylądowawszy w centrum miasta swoim statkiem, chce siać totalne zniszczenie. W tym celu użyje on potężnego działa laserowego, którego promień jest w stanie zniszczyć wszystko, co znajdzie się na jego drodze. Do nas należy wyznaczenie minimalnej liczby strzałów potrzebnej do zniszczenia wszystkich n budynków w mieście. Każdy budynek możemy utożsamić z pewnym prostokątem o bokach równoległych do osi prostokątnego układu współrzędnych; wystarczy, że promień lasera dotknie dowolnego punktu takiego prostokąta (rys. 1).

Zauważmy, że zbiór promieni, które mogą zniszczyć ustalony budynek, tworzy pewien kąt. Aby go wyznaczyć, wystarczy rozpatrzeć cztery promienie przechodzące przez wierzchołki prostokąta odpowiadającego budynkowi. Co więcej, konkretny kształt i położenie budynku nie jest istotne – wystarczy nam jedynie znajomość wspomnianego kąta.



Rys 2. Zbiór przedziałów na okręgu odpowiadających budynkom z rysunku 1 oraz ten sam zbiór na odcinku po rozcięciu okręgu.
Przedziały w kolejności rozpatrywania przez algorytm zachłanny to 2, 1, 3, 5, 4, 6, 7; algorytm strzeli w końce przedziałów 2, 5 i 6.

Zatem pierwsze, co zrobimy, to zamienimy geometryczny problem na płaszczyźnie dwuwymiarowej na równoważny problem jednowymiarowy na okręgu (rys. 2). W tym problemie mamy dane n przedziałów na okręgu (odpowiadających kątom dla budynków). Należy znaleźć minimalną liczbę półprostych wychodzących ze środka okręgu („strzałów"), tak by każdy przedział był przecięty co najmniej jedną półprostą.

Na rozgrzewkę rozwiążemy prostszą wersję tego problemu. Jeżeli istnieje półprosta wychodząca ze środka okręgu i nieprzecinająca żadnego z przedziałów, to możemy rozciąć okrąg wzdłuż tej półprostej i rozwiązać zadanie na odcinku. Nietrudno się przekonać, że działa wtedy następujące rozwiązanie zachłanne. Sortujemy przedziały niemalejąco po prawych końcach, a następnie przeglądamy je w tej właśnie kolejności. Za każdym razem, gdy natrafiamy na przedział, w który jeszcze nie strzelaliśmy (tzn. którego początek znajduje się za ostatnim strzałem), musimy wykonać nowy strzał; opłaca nam się to zrobić jak najdalej, czyli na końcu tego przedziału. Takie rozwiązanie będzie działać w czasie $O(n \log n)$.

Spróbujmy uogólnić ten pomysł w przypadku, gdy nie mamy dobrego kandydata na rozcięcie okręgu. Zauważmy, że i w tym przypadku istnieje rozwiązanie optymalne, w którym strzelamy jedynie w końce przedziałów. Istotnie: każdy strzał przecinający pewien zbiór przedziałów można przesunąć na koniec tego przedziału ze zbioru, który kończy się najwcześniej. Dostajemy zatem rozwiązanie o złożoności czasowej $O(n^2)$: dla każdego z przedziałów sprawdzamy, ile strzałów musimy zużyć, jeśli strzelimy w koniec tego przedziału (rozcinając tym samym okrąg), a w pozostałe przedziały strzelając zgodnie z algorytmem zachłannym.

Niech s będzie optymalną liczbą strzałów. Z powyższych rozważań wynika, że koniec danego przedziału albo należy do pewnego optymalnego rozwiązania, albo, strzelając w niego, uzyskamy rozwiązanie o liczbie strzałów $s+1$. Kluczowe jest teraz znalezienie co najmniej jednego „optymalnego" przedziału.

W tym celu zdefiniujmy tablicę $next[p]$, która dla przedziału p oznacza przedział o najwcześniejszym końcu spośród przedziałów, których początek leży za końcem przedziału p. Mając przedziały posortowane po końcach, tablicę *next* można wyznaczyć w czasie $O(n)$, poruszając się po okręgu dwoma wskaźnikami. Zauważmy, że jeśli zaczynamy od przedziału p, to zgodnie z rozwiązaniem zachłannym będziemy strzelać w przedziały $p, next[p], next[next[p]], \ldots$, aż obejdziemy cały okrąg.

I teraz kluczowa obserwacja: zaczynając z dowolnego przedziału p i wykonując n razy przypisanie $p := next[p]$, zawsze wylądujemy w pewnym przedziale optymalnym. Dowód jest nieco techniczny i wymaga przyjrzenia się, jak wyglądałaby sytuacja, gdyby wszystkie przedziały $p, next[p], next[next[p]], \ldots$ były nieoptymalne; zostawiamy go jako ćwiczenie dla Czytelnika.

Ostatecznie algorytm ma złożoność czasową $O(n \log n)$, zdominowaną przez sortowanie przedziałów. Pozostałe fazy (wyznaczenie przedziałów dla prostokątów, wyznaczenie tablicy *next* i pewnego przedziału optymalnego, algorytm zachłanny) działają w czasie liniowym.

Tomasz IDZIASZEK