# Od Prouheta–Tarry'ego–Escotta do Thuego–Morse'a

*Karol GRYSZKA**

Do jednych z najstarszych problemów w historii matematyki należy niewątpliwie zaliczyć równania diofantyczne, czyli równania o dziedzinie rozwiązań ograniczonej do liczb całkowitych. Obecną nazwę zawdzięczają one Diofantosowi, greckiemu matematykowi żyjącemu w III wieku naszej ery w Aleksandrii. Swoje rozważania na temat takich równań Diofantos zawarł w serii ksiąg pod tytułem *Arytmetyka*. Studiując jedną z nich, Pierre de Fermat – żyjący w XVII wieku francuski prawnik i matematyczny samouk – uznał, że pewne zawarte w niej równanie nie może mieć rozwiązań, o czym raczył poinformować przyszłych czytelników w słynnej uwadze, zamieszczonej na marginesie (czytanej przezeń książki oraz niniejszego artykułu). Mowa, rzecz jasna, o równaniu $x^n + y^n = z^n$ dla $n > 2$, które czekało na rozwiązanie (a właściwie dowód jego braku) ponad 300 lat. Dopiero w 1993 roku, po kilku latach intensywnych prac, Andrew Wiles zakończył wysiłek pokoleń matematyków, dowodząc postawionej na początku drugiej połowy XX wieku hipotezy Shimury–Taniyamy. Po licznych poprawkach jego rozumowanie zostało w roku 1995 oficjalnie opublikowane na łamach *Annals of Mathematics*, a w 2016 roku został on uhonorowany prestiżową Nagrodą Abela.

*Znalazłem zaiste zadziwiający dowód tego twierdzenia. Niestety, margines jest zbyt mały, aby go pomieścić.*

Wynikania WTF z hipotezy Shimury–Taniyamy dowiedziono na przełomie lat 80. i 90. XX wieku.

Wielkie Twierdzenie Fermata dotyczy prostego w sformułowaniu równania diofantycznego, którego rozwiązanie wymaga zastosowania bardzo zaawansowanych narzędzi matematycznych. W niniejszym artykule chciałbym przedstawić zgoła przeciwną sytuację: pozornie skomplikowane równanie diofantyczne przeanalizujemy przy użyciu metod elementarnych. Rozważmy następujący układ równań diofantycznych:

$$\sum_{a\in A} a^k = \sum_{b\in B} b^k, \qquad \text{dla } k = 1, \ldots, n.$$

gdzie $A$ oraz $B$ są pewnymi dwoma równolicznymi i rozłącznymi skończonymi zbiorami liczb całkowitych oraz $n \geqslant 1$ jest liczbą naturalną. Należy więc dla ustalonego wykładnika $n$ znaleźć takie dwa równoliczne i rozłączne zbiory liczb całkowitych $A$ i $B$, by sumy liczb z tych zbiorów w potęgach mniejszych lub równych $n$ były równe. Problem ten pochodzi od Eulera i Goldbacha, współcześnie znany jest pod nazwą problemu Prouheta–Tarry'ego–Escotta. Prouhet zajmował się tym układem w połowie XIX wieku, pozostali na początku XX wieku podali wiele interesujących rozwiązań.


Przyjrzyjmy się kilku przykładom. Znalezienie szczególnego rozwiązania dla małych $n$ (dla $n = 2$ jest nim, na przykład, $A = \{0, 4, 5\}$ oraz $B = \{1, 2, 6\}$) nie nastręcza większych kłopotów. Dla większych wykładników poziom trudności obliczeń wzrasta bardzo szybko, np. dla $n = 9$ przykładowe rozwiązanie to

$$A = \{0, 12, 125, 213, 214, 412, 413, 501, 614, 626\},$$
$$B = \{5, 6, 133, 182, 242, 384, 444, 493, 620, 621\}.$$

Polecam Czytelnikowi próbę znalezienia jakiegokolwiek rozwiązania dla $n = 3$ (przykładowe można znaleźć na końcu artykułu). Wydaje się, że problem Prouheta–Tarry'ego–Escotta jest trudny do rozwikłania, nawet jeśli postanowimy wspomóc się komputerem. Tymczasem czeka na nas ogromna niespodzianka. Okazuje się bowiem, że jesteśmy w stanie prosto skonstruować pewne rozwiązania dla dowolnej potęgi $n$. Ponadto żaden komputer nie będzie nam do tego potrzebny.

Zanim przedstawimy rozwiązanie, dla dowolnej liczby naturalnej $n$ określmy rekurencyjnie pewne skończone ciągi zer i jedynek. Rozpoczniemy od definicji *negatywu* ciągu zero-jedynkowego, czyli zamianie każdego występującego w nim zera na jedynkę i odwrotnie. Negatyw ciągu $A$ będziemy oznaczali przez $\overline{A}$;

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

dla przykładu, jeżeli $A = 01011$, to $\overline{A} = 10100$. Niech teraz $x^{(0)} = 01$. Gdy mamy już zdefiniowane $x^{(n)}$, to przyjmujemy $x^{(n+1)} = x^{(n)}\overline{x^{(n)}}$, to znaczy do ciągu $x^{(j)}$ dopisujemy z prawej strony jego negatyw. Przykład:

$$x^{(1)} = x^{(0)}\overline{x^{(0)}} = 01\overline{01} = 0110.$$

Tak zdefiniowane ciągi posłużą nam do rozwiązania problemu. Dla ustalonej liczby naturalnej $n$ podzielimy teraz zbiór $\{0, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ na takie dwa rozłączne zbiory, że odpowiednie sumy zgadzają się dla potęg od 0 do $n$. Niech

$$A_n = \{i \leqslant n : x_i^{(n)} = 0\} \quad \text{oraz} \quad B_n = \{i \leqslant n : x_i^{(n)} = 1\};$$

są to zatem numery tych wyrazów ciągu $x^{(n)}$, które są równe odpowiednio 0 lub 1. Wtedy $A_n$ i $B_n$ są poszukiwanymi zbiorami. Dowód będzie przebiegał indukcyjnie względem $n$. Dla $n = 0$ mamy

$$x^{(n)} = 01 \quad \text{oraz} \quad A_0 = \{1\},\ B_0 = \{2\} \text{ i oczywiście } 1^0 = 2^0 = 1.$$

Wykonamy teraz krok indukcyjny. Załóżmy, że mamy już zdefiniowane $A_{n-1}$ oraz $B_{n-1}$ spełniające tezę. Niech

$$\widetilde{A}_{n-1} = \{2^n + i : i \in B_{n-1}\} \quad \text{oraz} \quad \widetilde{B}_{n-1} = \{2^n + i : i \in A_{n-1}\}.$$

Wtedy $A_n = A_{n-1} \cup \widetilde{A}_{n-1}$ i analogicznie $B_n = B_{n-1} \cup \widetilde{B}_{n-1}$. Równości te wynikają wprost z definicji ciągu $x^{(n)}$ i są kluczową obserwacją wykorzystywaną w kroku indukcyjnym. Jeżeli teraz $k \leqslant n$, to, oznaczając przez $S_j$ sumę $j$-tych potęg liczb ze zbioru $A_{n-1}$ (dla $j \leqslant n-1$ równą sumie $j$-tych potęg liczb ze zbioru $B_{n-1}$), mamy:

$$\sum_{a \in A_n} a^k = \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{a \in \widetilde{A}_{n-1}} a^k = \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{b \in B_{n-1}} (2^n + b)^k =$$

$$= \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{b \in B_{n-1}} \left( \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^{n(k-j)} b^j \right) =$$

$$= \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{b \in B_{n-1}} b^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} 2^{n(k-j)} S_j.$$

Analogicznie moglibyśmy udowodnić tę samą równość dla sumy $k$-tych potęg liczb ze zbioru $B_n$, co kończy dowód indukcyjny.

Zaprezentowana metoda ma jedną zaletę – pozwala w prosty sposób skonstruować jakiekolwiek rozwiązanie. Problemem jest jednak jej optymalność. Zwróćmy uwagę na to, że dla $n = 9$ otrzymujemy w ten sposób zbiory $A$ i $B$ złożone z 512 elementów każdy, a tymczasem widzieliśmy wcześniej rozwiązanie, w którym zbiory $A$ oraz $B$ były „zaledwie" dziesięcioelementowe. Okazuje się, że rozwiązania dla wykładnika $n$ muszą być zbiorami złożonymi z co najmniej $n + 1$ liczb całkowitych. Rozwiązanie, które spełnia to oszacowanie jako równość, nazywamy *idealnym*. Największym wykładnikiem, dla którego znane jest idealne rozwiązanie, jest $n = 11$, a jest nim para dwunastoelementowych zbiorów

$$A = \{\pm 22, \pm 61, \pm 86, \pm 127, \pm 140, \pm 151\},$$
$$B = \{\pm 35, \pm 47, \pm 94, \pm 121, \pm 146, \pm 148\}.$$

Ciągi skończone $x^{(n)}$, które posłużyły nam do konstrukcji rozwiązań, są początkowymi fragmentami pewnego nieskończonego ciągu zero–jedynkowego, zwanego ciągiem Thuego–Morse'a. Formalnie ciąg ten, oznaczany dalej przez $x$, można zdefiniować jako $x = (x_n^{(n)})_{n=1}^{\infty}$. Jedną z ciekawych własności ciągu $x$ jest to, że nie zmienia się on pod wpływem operacji podstawień $0 \to 01$, $1 \to 10$. Wynika to z faktu, że wykonanie tej operacji na ciągu $x^{(n)}$ daje nam w rezultacie ciąg $x^{(n+1)}$, czego nietrudno dowieść za pomocą indukcji. Oczywiście, nie jest to jedyna jego interesująca cecha, jednak na zaprezentowanie wszystkich nie starczyłoby miejsca na marginesie tego artykułu, ani nawet w całym numerze *Delty*.

Rozwiązanie (idealne) dla $n = 3$: $A = \{0, 4, 7, 11\}$, $B = \{1, 2, 9, 10\}$.