Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

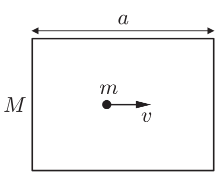
Zadania z fizyki nr 624, 625

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2016

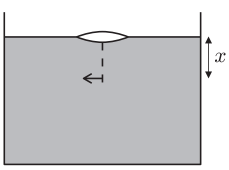
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

624. Ciężarek o masie m zawieszony jest w polu ciężkości na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości k. Długość nierozciągniętej sprężyny jest zaniedbywalna. Sprężynę odchylono do poziomu, rozciągnięto do długości x_0 i puszczono swobodnie. Znaleźć najmniejszą długość sprężyny podczas ruchu.

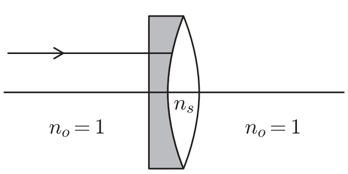
625. Na dnie naczynia znajduje się cienka metalowa płytka, której powierzchnia S jest dużo mniejsza od powierzchni dna naczynia. W naczyniu znajduje się ciecz o gęstości ρ i stałej dielektrycznej ε. Wysokość słupa cieczy jest dużo mniejsza od rozmiarów liniowych płytki. O ile podniesie się ciecz nad płytką, gdy na płytkę wprowadzony zostanie ładunek Q?



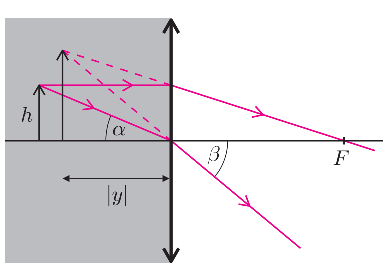
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Rozwiązania zadań z numeru 6/2016

Przypominamy treść zadań:

620. W chwili początkowej prostokątna ramka o masie M spoczywa na powierzchni poziomej, a mała kulka o masie m porusza się z prędkością v wewnątrz ramki, równolegle do boku o długości a (rys. 1). Kulka zderza się sprężyście ze środkami krótszych boków ramki. Znaleźć czas pomiędzy kolejnymi zderzeniami z tym samym bokiem ramki. Nie ma tarcia.

621. Dwuwypukła soczewka o promieniach krzywizny R, wykonana ze szkła o współczynniku załamania n_s , zanurzona jest jedną stroną w wodzie (rys. 2). Mały przedmiot znajduje się w wodzie na osi optycznej soczewki, w odległości x od soczewki. Wysokość przedmiotu wynosi h. W soczewce powstaje obraz pozorny. Jakie jest jego powiększenie liniowe? Współczynnik załamania szkła jest równy n_w .

620. W układzie środka masy prędkości kulki i ramki odpowiednio $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ spełniają związki: $m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{v}_2 = 0$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_w$, gdzie $\mathbf{v}_w$ jest prędkością względną. Stąd $v_1 = \frac{M}{M+m}v_w$, $v_2 = \frac{m}{M+m}v_w$. Energia w układzie środka masy wynosi $E = \frac{1}{2}Mv_2^2 + 2mv_1^2 = \frac{mM}{2(m+M)}v_w^2$. Na układ nie działają z zewnątrz w kierunku poziomym żadne siły, zatem środek masy porusza się ze stałą prędkością i jego energia kinetyczna nie zmienia się. Zderzenia są sprężyste, więc nie zmienia się również energia w układzie środka masy, prędkość względna kulki i ramki pozostaje stała i równa prędkości początkowej kulki v. Szukany czas między dwoma kolejnymi zderzeniami wynosi $t = 2a/v$.

621. Aby skonstruować obraz przedmiotu, jaki powstaje w soczewce, musimy odpowiedzieć na pytania: jak biegnie promień równoległy do osi optycznej po przejściu przez soczewkę oraz jak biegnie promień przechodzący przez środek soczewki. W przypadku promienia równoległego możemy wprowadzić umieszczony w powietrzu układ zastępczy, złożony ze stykających się cienkich soczewek – szklanej o promieniach krzywizny R oraz płasko-wklęsłej soczewki wodnej (rys. 3). Odwrotność ogniskowej takiego układu jest sumą odwrotności poszczególnych soczewek:

$$\frac{1}{f} = -\frac{n_w - 1}{R} + \frac{2(n_s - 1)}{R} = \frac{2n_s - n_w - 1}{R}.$$

Oznaczmy kąt padania na środek soczewki promienia wychodzącego z końca przedmiotu (rys. 4) przez α, a kąt załamania tego promienia przez β. Ponieważ przedmiot jest mały, mamy $\beta = n_w\alpha$ zgodnie z prawem załamania.

Korzystając z rysunku 4 i przybliżenia małych kątów, otrzymujemy związki: $h = x\alpha$, $H = |y|\beta$, gdzie y jest odległością obrazu od soczewki, H wysokością obrazu. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy też: $\frac{H}{h} = \frac{f+|y|}{f} = n_w\frac{|y|}{x}$. Stąd $|y| = \frac{fx}{n_w f - x}$, a szukane powiększenie dane jest wzorem

$$p = \frac{H}{h} = \frac{1}{1 - x\frac{2n_s - n_w - 1}{n_w R}}.$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 717 ($WT = 3{,}70$) i 718 ($WT = 1{,}03$) z numeru 3/2016

Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Janusz Olszewski	Warszawa	42,14
Paweł Kubit	Kraków	41,52
Marek Gałecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Piotr Kumor	Olsztyn	34,15
Witold Bednarek	Łódź	33,95

Zadania z matematyki nr 727, 728

Redaguje Marcin E. KUCZMA

727. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkącików o boku 1. Każdy wierzchołek powstałej siatki (tj. wierzchołek któregoś trójkącika) jest pomalowany na biało lub czarno. Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu zmieniamy kolor wszystkich wierzchołków, leżących na jednej linii prostej, zawierającej bok któregoś trójkącika.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których – wychodząc od stanu: wszystkie wierzchołki białe – można dojść do stanu: dokładnie jeden wierzchołek czarny.

728. Czy istnieje funkcja różniczkowalna f, będąca różnowartościowym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb dodatnich na ten sam zbiór, i taka, że jej pochodna jest funkcją odwrotną do f?

Zadanie 728 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi

Rozwiązania zadań z numeru 6/2016

Przypominamy treść zadań:

723. Czy każdy ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych ma wyraz, będący jednocześnie pewnym wyrazem ciągu Fibonacciego (F_n)? ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

724. Dowieść, że liczby zespolone a, b, c spełniają równanie
$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a| + |b| + |c|$$
wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równanie
$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a+b+c|.$$

723. Odpowiedź: nie. Banalny kontrprzykład (jeden z wielu): ciąg $(11n+4;\ \ n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ciąg Fibonacciego – a raczej jego początkowy odcinek – zapisany modulo 11, przedstawia się tak: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, \ldots$. Dalej reszty (mod 11) powtarzają się cyklicznie, z okresem 10; reszta 4 jest w tym ciągu nieobecna.

724. Podstawienie $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ przeprowadza dane dwa równania do postaci
$$|x| + |y| + |z| = \frac{1}{2}\big(|y+z| + |z+x| + |x+y|\big) \tag{1}$$
oraz
$$|x| + |y| + |z| = |x+y+z|. \tag{2}$$
Oczywiste są nierówności
$$|x| + |y| + |z| \geqslant \frac{1}{2}\big(|y+z| + |z+x| + |x+y|\big) \geqslant |x+y+z|.$$
Jeśli więc liczby x, y, z spełniają równanie (2), to spełniają też i równanie (1). Pozostaje do wykazania implikacja przeciwna.

Załóżmy więc, że spełnione jest równanie (1), czyli że zachodzi równość w pierwszej z napisanych nierówności. To wymusza jednoczesne zachodzenie trzech równości:
$$|y+z| = |y| + |z|, \qquad |z+x| = |z| + |x|, \qquad |x+y| = |x| + |y|.$$
Liczby $|x+y|$, $|x|$, $|y|$ są długościami boków trójkąta (na płaszczyźnie zespolonej) o wierzchołkach 0, y, $-x$. Równość $|x+y| = |x| + |y|$ oznacza, że jest on zdegenerowany do odcinka o końcach $y, -x$, czyli że punkty x, y leżą na jednej półprostej, wychodzącej z punktu 0. Ta sama konkluzja dla par y, z oraz z, x pokazuje, że wszystkie trzy punkty x, y, z leżą na jednej takiej półprostej. A wówczas zachodzi równość (2). To kończy rozwiązanie zadania.
Uwaga. Warto może zauważyć, że dwa podane (równoważne) równania *nie są* równoważne trzeciemu równaniu:
$$|a+b+c| = |a| + |b| + |c|,$$
czyli (w terminach zmiennych x, y, z) równaniu, łączącemu prawe strony (1) i (2). Prosty przykład: $x = y = 1$, $z = -1$. Równania (1) i (2) nie są spełnione, ale ich prawe strony mają jednakową wartość.