Budowle z klocków

Joanna JASZUŃSKA

Wiele zadań przestrzennych łatwiej rozwiązać, gdy najpierw zbada się analogiczny problem płaski. Taki dwuwymiarowy odpowiednik czasem sam się narzuca, a czasem jego sformułowanie wymaga pewnej pomysłowości. Poniżej prezentujemy przykłady zadań o przestrzennych klockach, na różne sposoby „spłaszczane”.

1. Czy z prostopadłościennych klocków o wymiarach $2\times3\times3$ można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $8\times8\times9$?

2. Z kostek domina o wymiarach 2×1 ułożono szachownicę 6×6. Wykaż, że istnieje taka prosta równoległa do jednego z boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która nie rozcina żadnej z kostek domina.

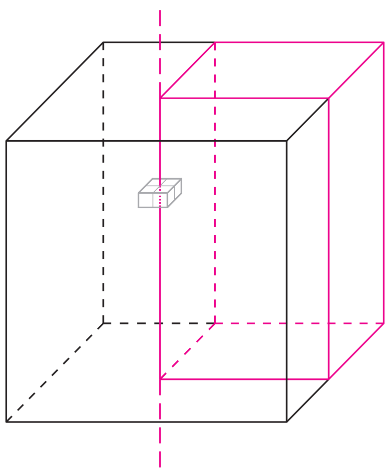
3. Z klocków o wymiarach $2\times2\times1$ zbudowano sześcian $20\times20\times20$. Wykaż, że istnieje taka prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu i przechodząca przez jego wnętrze, która nie przecina wnętrza żadnego z klocków.

4. Udowodnij, że po usunięciu z kwadratu o krawędzi 2^n dowolnego spośród $(2^n)^2$ tworzących go kwadratów jednostkowych powstaje figura, którą daje się szczelnie wypełnić *klockami* , zbudowanymi z trzech kwadratów jednostkowych.

5. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu o krawędzi 2 jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych, z których jest on zbudowany. Udowodnij, że po usunięciu z sześcianu o krawędzi 2^n dowolnego spośród $(2^n)^3$ tworzących go sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Przyda się tu „spłaszczenie” polegające na spojrzeniu na ścianę 8×8 prostopadłościanu $8\times8\times9$. Gdyby dało się zbudować go z opisanych w zadaniu klocków, ściana ta byłaby zbudowana z prostokątów o wymiarach 2×3 oraz 3×3. Jednak to jest niemożliwe, gdyż figura złożona z takich prostokątów ma pole podzielne przez 3, a tymczasem ściana 8×8 ma pole równe 64. $\square$

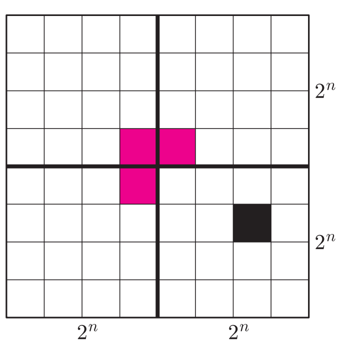


Rys. 1. Kolorowy prostopadłościan i szary klocek przebity prostą.

R3. Prostych równoległych do pewnej krawędzi sześcianu, przechodzących przez jego wnętrze i biegnących wzdłuż linii podziału na kostki jednostkowe jest po $19\cdot19$ w każdym z trzech kierunków, a więc łącznie $3\cdot361=1083$.

Załóżmy, że któraś z nich przebija nieparzystą liczbę klocków. Rozważmy prostopadłościan wyznaczony, w sposób przedstawiony na rysunku 1, przez tę prostą i dowolną równoległą do niej krawędź sześcianu. Wówczas objętość tego prostopadłościanu byłaby nieparzysta, bo zawierałby on po jednej kostce jednostkowej z każdego z przebitych klocków, a pozostałe klocki w całości lub po połowie. Liczba ta jest jednak jednocześnie wielokrotnością 20 (z uwagi na rozmiar sześcianu), co jest niemożliwe.

Zauważmy, że każdy klocek $2\times2\times1$ może być przebity przez najwyżej jedną z rozważanych prostych. Gdyby każda z nich przebijała co najmniej dwa klocki, to łącznie przebijałyby one co najmniej $2\cdot1083=2166$ klocków. To także jest niemożliwe, gdyż klocków jest łącznie $20\cdot20\cdot20/4=2000$. Wobec tego któraś z rozważanych prostych nie przechodzi przez żaden klocek. $\square$



Rys. 2. Na czarno oznaczono usunięty kwadrat jednostkowy.

R4. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=1$ teza jest prawdziwa: rozważana figura jest pojedynczym klockiem. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego n. Niech K będzie kwadratem o krawędzi 2^{n+1}, z którego usuwamy jedno pole. Podzielmy K na cztery przystające mniejsze kwadraty o krawędzi 2^n, jeden z nich zawiera usunięte pole. Umieśćmy pojedynczy klocek na środku kwadratu K w sposób przedstawiony na rysunku 2. Wówczas na mocy założenia indukcyjnego każdy z czterech mniejszych kwadratów bez jednego pola da się szczelnie wypełnić klockami, co kończy dowód. $\square$

Zadanie 1 pochodzi z XI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, zadanie 3 z *Ligi 44* (nr 409), a zadanie 5 z L OM.