Stabilność Układu Słonecznego

Od czasów Newtona znane są prawa rządzące ruchem ciał podlegających siłom przyciągania grawitacyjnego. Dla izolowanego układu N ciał dostajemy układ $3N$ równań różniczkowych drugiego rzędu (po trzy na współrzędne środka masy każdego ciała), który ma jednoznaczne rozwiązanie przy zadanych położeniach i prędkościach początkowych. W istocie, można ograniczyć się do układu współrzędnych związanego ze środkiem masy całego układu i liczba równań redukuje się do $3(N-1)$. Tak precyzyjnie sformułowane zagadnienie nosi nazwę problemu N ciał.

Niestety, ścisłe rozwiązania tych równań zostały znalezione tylko w szczególnych przypadkach. Najważniejszym z nich jest zagadnienie Keplera, czyli problem dwóch ciał. Z pierwszego prawa Keplera (zasada zachowania momentu pędu) wynika, że oba ciała poruszają się w nieruchomej płaszczyźnie. Całkowanie odpowiednich równań w biegunowym układzie współrzędnych r, φ (w tej płaszczyźnie) pokazuje, że trajektoria każdego ciała jest opisana równaniem postaci

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

gdzie A jest amplitudą, a $e > 0$ jest mimośrodem orbity. Powyższe równanie opisuje krzywą stożkową. Dla $e < 1$ jest to elipsa z ogniskiem w środku masy, a odpowiednie rozwiązania układu Newtona są okresowe.

Kepler w 1609 roku opublikował dwa prawa opisujące ruch planety wokół Słońca, co łatwo można przeformułować na zagadnienie dwóch ciał, a w 1619 trzecie prawo wiążące rozmiar orbity i czas jej obiegu. Izaak Newton wyprowadził z tych praw i zasad dynamiki prawo powszechnego ciążenia.

Ciekawe rozwiązanie zagadnienia trzech ciał zostało znalezione przez Lagrange'a. Tutaj trzy ciała leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego obracającego się wokół środka masy w ustalonej płaszczyźnie.

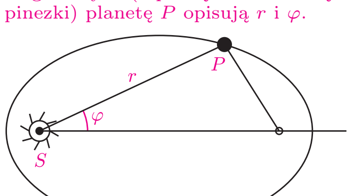
Pierwszą realizację rozwiązania Lagrange'a odkrył w 1906 roku Max Wolf: tworzą ją Słońce, Jowisz i planetoida Achilles.

Naturalnym układem grawitacyjnym jest nasz Układ Słoneczny (z dyskusyjną, ale znacznie większą od 2 liczbą N). Mimo iż nikt nie porywał się na rozwiązywanie skomplikowanego układu równań z nim związanego, to jednak problemu stabilności naszego sytemu nie można zignorować. Jest to pytanie, czy układ planetarny będzie zachowywał obecny kształt w odległej przyszłości, czy któraś z planet może go opuścić lub jakaś kolizja może spowodować jego dramatyczną zmianę.

Wszystkie planety obiegają Słońce po orbitach bardzo zbliżonych do elips będących rozwiązaniem odpowiedniego układu dwóch ciał dla $\varepsilon < 1$. Podobnie niektóre komety. Obserwujemy jednak również komety mające orbity paraboliczne bądź hiperboliczne (np. C/1980 E1 (Bowell); $\varepsilon = 1{,}057$).

Ta kwestia stała się swego rodzaju obsesją XIX wieku i była na tyle istotna, że w 1885 roku król szwedzki, Oskar II, ufundował nagrodę za postęp w tej sprawie. Nagrodę dostał Henri Poincaré, ale trzeba uczciwie powiedzieć, że ani on, ani nikt inny do tej pory nie podał ścisłego matematycznego dowodu stabilności układu N ciał. W tym miejscu należy wymienić także nazwiska Karla Weierstrassa, Sophie Kowalewskiej i Petera Dirichleta, którzy aktywnie pracowali nad tym problemem.

Równanie elipsy uzyskuje się z praktycznego sposobu na jej rysowanie: wbijamy w podłoże dwie pinezki połączone sznurkiem o długości $2a$ i rysujemy wszystkie punkty (nazwijmy je położeniami planety), które zakreśli ołówek napinający sznurek. Jedną z pinezek nazwijmy Słońcem i oznaczmy S, a jedno z położeń planety P. W układzie współrzędnych biegunowych (o początku S i osi łączącej pinezki) planetę P opisują r i φ.



Odległość między pinezkami musi być mniejsza od długości sznurka, oznaczmy ją $2a\varepsilon$, gdzie $\varepsilon < 1$ nazywany jest mimośrodem. Z twierdzenia kosinusów mamy

$$r^2 + 4a^2\varepsilon^2 - 4ra\varepsilon \cos \varphi = (2a - r)^2.$$

Otwierając nawias, redukując r^2 i dzieląc obustronnie przez $4a$ otrzymujemy $a\varepsilon^2 - r\varepsilon \cos \varphi = a - r$, czyli $r(1 - \varepsilon \cos \varphi) = a(1 - \varepsilon^2)$, a więc równanie orbity planety podane w głównym tekście.

Metoda stosowana przez XIX-wiecznych matematyków startowała od szeregów typu Fouriera. W pierwszym przybliżeniu zakładano, że Słońce jest nieruchome, a każda z planet porusza się ruchem okresowym (z okresem $2\pi/\omega_i$) po orbicie eliptycznej. Zatem położenie i-tej planety zadane jest szeregiem Fouriera

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\omega_i t) + B_m \sin(m\omega_i t)$$

z wektorami A_m i B_m zależnymi od danych początkowych. Następnie sukcesywnie uwzględniano się siły wzajemnych oddziaływań planet i ruch samego Słońca. Wprowadzenie tych zaburzeń prowadzi do tzw. szeregów Poincarégo. Niestety, nie można w rozsądny sposób zapewnić zbieżności tych szeregów.

Pewien postęp w tej sprawie uzyskano dopiero na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku – jest on znany jako twierdzenie KAM od nazwisk jego twórców: Andrieja Kołmogorowa, Władimira Arnolda i Jürgena Mosera. Ale o tym napiszę w następnym numerze *Delty*.

Więcej szczegółów historycznych można znaleźć zwłaszcza w artykule Jürgena Mosera w *The Mathematical Intelligencer* 1(1978), 65–71.

Henryk ŻOŁĄDEK