Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

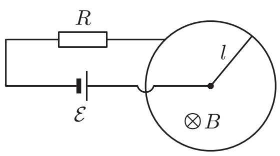
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2016

Zadania z fizyki nr 622, 623

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

622. Motocyklista porusza się po torze w kształcie okręgu. Ruszając z miejsca, chce jak najszybciej osiągnąć maksymalną prędkość. Jaką część okręgu przebędzie zanim osiągnie ten cel?



Rys. 1

623. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1, metalowy pręt może obracać się wokół środka metalowego pierścienia o promieniu l. Drugim końcem dotyka pierścienia. Siła tarcia w ruchomym kontakcie wynosi F. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B jest prostopadłe do powierzchni pierścienia. Siła elektromotoryczna ogniwa wynosi ϵ, opór obwodu jest równy R. Znaleźć ustaloną prędkość pręta i natężenie prądu w obwodzie.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 610 ($WT = 3{,}85$), 611 ($WT = 1{,}83$), 612 ($WT = 2{,}15$) i 613 ($WT = 3{,}70$) z numerów 1–2/2016

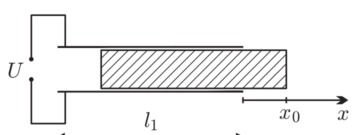
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,47
Michał Koźlik	Poznań	33,88
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22
Jan Zambrzycki	Białystok	18,94

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2016

Przypominamy treść zadań:

618. Na kartce papieru narysowano w dziesięciokrotnym pomniejszeniu tor kamienia wyrzuconego z prędkością v pod kątem α do poziomu. Po narysowanej krzywej pełznie mały żuczek, którego prędkość ma stałą wartość u. Ile wynosi przyspieszenie żuczka w punkcie odpowiadającym maksymalnej wysokości, na jaką wzniósł się kamień? Oporu powietrza podczas ruchu kamienia nie uwzględniamy.

619. Całą przestrzeń między kładkami kondensatora płaskiego wypełnia płytka dielektryczna o masie m i stałej dielektrycznej ε (rys. 2). Okładki kondensatora mają rozmiary $l_1 \times l_2$, odległość między nimi wynosi d ($l_1 \gg d$, $l_2 \gg d$). Między okładkami utrzymywane jest stałe napięcie U. Płytkę wysunięto z obszaru kondensatora wzdłuż boku o długości l_1 na odległość x_0, a następnie puszczono swobodnie. Zaniedbując tarcie, znaleźć zależność przemieszczenia i prędkości płytki od czasu.

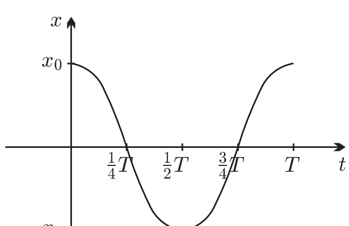


Rys. 2

618. Gdy kamień osiąga maksymalną wysokość, jego przyspieszenie g jest prostopadłe do toru i jest przyspieszeniem dośrodkowym: $g = (v\cos\alpha)^2/R$, gdzie R jest promieniem krzywizny toru w rozważanym punkcie. Promień krzywizny toru w odpowiadającym punkcie na rysunku wynosi $r = R/10$. Przyspieszenie żuczka jest prostopadłe do toru (bo jego wartość prędkości jest stała) i wynosi $a = u^2/r = 10u^2g/(v\cos\alpha)^2$.

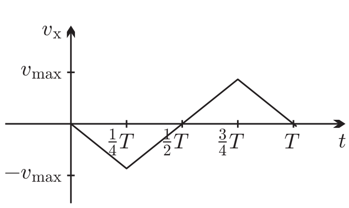
619. Gdy płytka wysunięta jest z kondensatora na odległość $x \leqslant l_1$, pojemność kondensatora wynosi $c(x) = \epsilon_0 l_2[x + \epsilon(l_1 - x)]/d$, energia $W(x) = c(x)U^2/2$, ładunek na okładkach $Q(x) = c(x)U$. Oznaczając przez ΔE_k zmianę energii kinetycznej kondensatora, gdy położenie płytki zmienia się o Δx, możemy napisać bilans energii: $\Delta E_k + W(x + \Delta x) = W(x) + W_{źr}$, gdzie $W_{źr} = [Q(x + \Delta x) - Q(x)]\,U = \Delta c U^2$ jest pracą źródła. Stąd

$$\Delta E_k = \Delta c U^2/2 = -\frac{\epsilon_0 l_2(\epsilon - 1)U^2}{2d}\Delta x.$$



Rys. 3

Gdy Δx jest małe, możemy przyjąć, że siła $F_x(x)$ działająca na dielektryk wzdłuż osi x nie zmienia się, zatem $\Delta E_k = F_x(x)\Delta x$. Dla dodatnich Δx, energia kinetyczna maleje, dielektryk jest więc wciągany do kondensatora siłą o stałej wartości $F = \epsilon_0 l_2(\epsilon - 1)U^2/(2d)$, jego położenie opisane jest wzorem $x(t) = x_0 - at^2/2$, prędkość $v_x(t) = -at$, gdzie $a = F/m$. Dielektryk wykonuje więc drgania wokół położenia równowagi dla $x = 0$, gdzie prędkość osiąga maksymalną wartość $v_{max} = \sqrt{2ax_0}$. Okres drgań wynosi $T = 4\sqrt{2x_0/a}$. Zależność położenia i prędkości dielektryka od czasu przedstawiona jest na wykresach (rysunki 3 i 4), wykres położenia składa się z fragmentów parabol.



Rys. 4

Zadania z matematyki nr 725, 726

Redaguje Marcin E. KUCZMA

725. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Przekątne przecinają się w punkcie E. Prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt E, przecina proste AB i AD w punktach K i L. Wykazać, że punkty B, D, K, L leżą na jednym okręgu.

726. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że istnieje nieujemna liczba całkowita m taka, że $2m \leqslant n$ oraz różnica $2^n - 2^m$ dzieli się przez n.

Zadanie 726 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 715 ($WT = 2{,}20$) i 716 ($WT = 1{,}85$) z numeru 2/2016

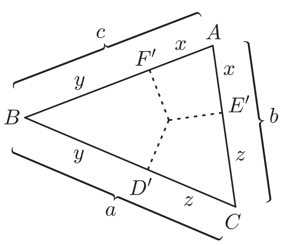
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Paweł Kubit	Kraków	40,59
Marek Gałecki	USA	37,76
Janusz Olszewski	Warszawa	37,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Witold Bednarek	Łódź	33,95
Piotr Kumor	Olsztyn	33,12

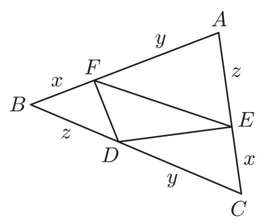
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2016

Przypominamy treść zadań:

721. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty D, E, F, w których okręgi dopisane do trójkąta są styczne do tych boków. Niech R i r będą promieniami okręgów opisanego i wpisanego. Dowieść, że stosunek pól trójkątów ABC i DEF wynosi $2R/r$.

722. Rozwiązać równanie $2^x + 2^y = 6^z$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.





721. Punkty D, E, F są położone na bokach BC, CA, AB symetrycznie (względem środków owych boków) do punktów D', E', F', w których okrąg wpisany jest do boków styczny. Przyjmijmy oznaczenia:

$$x = |AE'| = |AF'| = |BF| = |CE|,$$
$$y = |BF'| = |BD'| = |CD| = |AF|,$$
$$z = |CD'| = |CE'| = |AE| = |BD|, \qquad s = x + y + z,$$
$$a = |BC| = s - x, \quad b = |CA| = s - y, \quad c = |AB| = s - z.$$

Oznaczając pole trójkąta nawiasem kwadratowym, uzyskujemy ciąg równości

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = 1 - \frac{[AEF]}{[ABC]} - \frac{[BFD]}{[ABC]} - \frac{[CDE]}{[ABC]} =$$
$$= 1 - \frac{yz}{bc} - \frac{zx}{ca} - \frac{xy}{ab} = \frac{abc - ayz - bzx - cxy}{abc}.$$

Zastępując w liczniku a, b, c przez $s-x$, $s-y$, $s-z$, otrzymujemy po krótkim rachunku wzór

$$(*) \qquad \frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2xyz}{abc}.$$

Pozostaje teraz skorzystać ze znanych wzorów, wyrażających pole trójkąta (jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego):

$$[ABC] = rs = \frac{abc}{4R} = \sqrt{sxyz} \qquad \text{(ostatni – to wzór Herona).}$$

Dostajemy związki $abc = 4Rrs$ oraz $xyz = r^2 s$, które po wprowadzeniu do równości $(*)$ dają tezę zadania.

722. Wykładniki x, y nie mogą być równe, gdyż wówczas lewa strona równania byłaby potęgą dwójki. Przyjmijmy więc, że $x < y$, i zapiszmy $y = x + t$, gdzie $t \geqslant 1$. Równanie przybiera postać $2^x(2^t + 1) = 2^z 3^z$, z której wynika, że $x = z$, $2^t + 1 = 3^z$.

Jeśli $t = 1$, to $z = 1$; dostajemy rozwiązanie $x = 1$, $y = 2$.

Jeśli $t \geqslant 2$, to $3^z = 2^t + 1 \equiv 1 \pmod 4$, skąd wniosek, że z jest liczbą parzystą: $z = 2w$. Dostajemy równanie

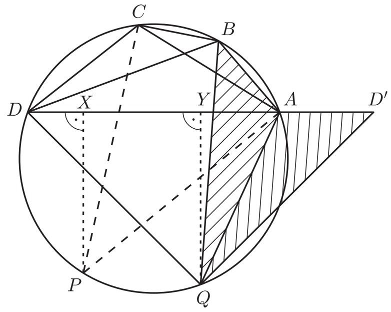
$$2^t = 3^{2w} - 1 = (3^w - 1)(3^w + 1).$$

Czynniki prawej strony muszą być potęgami dwójki; a skoro różnią się o 2, są to liczby 2 i 4. To znaczy, że $w = 1$, czyli $z = 2$, $t = 3$, co daje rozwiązanie $x = 2$, $y = 5$.

Uwzględniając możliwą zamianę ról x i y, widzimy, że równanie ma cztery rozwiązania (x, y, z) w liczbach całkowitych dodatnich: $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(2,5,2)$, $(5,2,2)$.

Rozwiązanie zadania M 1505.
Niech D' będzie takim punktem na prostej AD, na zewnątrz okręgu ω, że $AD' = AB$. Zauważmy, że wówczas $\sphericalangle QAD' = 180^\circ - \sphericalangle QAD = 180^\circ - \sphericalangle QBD = 180^\circ - \sphericalangle QDB = \sphericalangle QAB$. Stąd trójkąty QAD' i QAB są przystające, w szczególności $QD' = QD$. W takim razie trójkąt $QD'D$ jest równoramienny i

$$DY = YD' = YA + YD' = YA + AB.$$



Analogicznie otrzymujemy równość $AX = XD + DC$. W takim razie mamy $2 \cdot XY = (AX - YA) + (DY - XD) = (AX - XD) + (DY - YA) = DC + AB$, a stąd $XY = \dfrac{DC + AB}{2} = 5$.