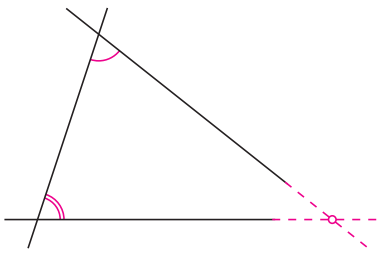
Inne światy, inne geometrie

Geometrię szkolną nazywamy euklidesową, bo jej pierwsze aksjomaty zostały podane w *Elementach* Euklidesa (około −300). Wśród nich wyróżniał się aksjomat mówiący o tym, że na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić tylko jedną prostą z nią rozłączną. Zasugerowana przez Proklosa (V wiek) możliwość wyprowadzenia tego aksjomatu z pozostałych przez następne 1300 lat drażniła ambicje praktycznie wszystkich matematyków, co owocowało dowodami błędnymi (bo opartymi na przesłankach, które same nie miały dowodów).

Dokładniej: ten podejrzany aksjomat brzmiał następująco.

Jeśli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z trzecią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to proste te, po przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony.



Sytuacja zmieniła się, gdy Girolamo Saccheri opublikował *Euclides ab omni nævo vindicatus* (1733), gdzie badał geometrię bez podejrzanego aksjomatu, uzyskując szereg twierdzeń, w których w bardzo wątpliwy sposób doszukiwał się sprzeczności. Wtedy na arenę wkroczyli filozofowie zaniepokojeni, bo dopuszczenie (choćby na próbę) różnych (i sprzecznych!) opisów przestrzeni wydało im się niedopuszczalne, gdyż przestrzeń jest areną świata, a ten jest tylko jeden. Zwłaszcza rozważania Immanuela Kanta o różnym charakterze naszych sądów (*Krytyka czystego rozumu*) kazały tego rodzaju badania uznać za wykraczające poza obręb dającej się zaakceptować nauki.

Po polsku tytuł pracy Saccheriego to *Euklides ze wszystkich piętn oswobodzony.*

Reakcja matematyków była różna. Johann Heinrich Lambert, zająwszy się taką alternatywną geometrią, uzyskał tak wiele zaskakująco pięknych rezultatów (*Teoria równoległych*, 1761), iż ogłosił, że jeśli to nie jest nauka, to on chce uprawiać nienaukę. Z kolei Gauss, przekonawszy się w końcu do możliwości istnienia takiej geometrii, nie chciał ujawniać swoich rezultatów, bojąc się – jak pisał – *wrzasku Beotów.*

Sprawa istnienia alternatywnej geometrii nie dała się jednak ukryć. Dwaj młodzi ludzie uparli się nie tylko przy uprawianiu tej geometrii, lecz głosili jej równoprawność, ba – supremację nad geometrią euklidesową. Rosjanin, Nikołaj Łobaczewski, w 1829 roku opublikował pracę *O podstawach geometrii*, a Węgier, Janos Bolyai, w 1832 roku *Appendix* do książki ojca o dydaktyce matematyki – w obu tych pracach, choć odmiennie, nowa geometria była konsekwentnie wprowadzona. Rzecz skończyła się fatalnie dla obu odkrywców, ale nowa geometria stała się faktem.

Łobaczewski został usunięty ze stanowiska rektora uniwersytetu w Kazaniu i pozbawiony prawa wykładania, Bolyai zaś skutkiem nieprzychylnych opinii został wpędzony w śmiertelną depresję.

Sprawę statusu tej geometrii (zwanej już geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego) określił Felix Klein, publikując w 1870 roku jej model w geometrii euklidesowej i model geometrii euklidesowej w geometrii B–Ł, czyli dowodząc ich równoprawności. Co więcej, Bernhard Riemann w swoim wykładzie habilitacyjnym (1854) wskazał sposób konstrukcji szerokiej rodziny geometrii, których te dwie były szczególnymi przypadkami. Tego też nie można było zakwestionować, bo jego koncepcja była prostym uogólnieniem gaussowskiej teorii powierzchni leżących w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Riemann uznał, że geometrie dzieją się w obiektach powstałych z pozlepiania kawałków zwykłej przestrzeni (tak jak zszywa się z łatek kożuchy czy torebki) – dziś noszą one nazwę rozmaitości. Na nich określa się odległość tak, by owo zlepianie nie powodowało powstawania osobliwości.

Wykład Riemanna nosił tytuł *O hipotezach leżących u podstaw geometrii.* Helmholtz, chcąc podkreślić, że stanowił on inspirację jego rozważań, opublikował swoją pracę pod tytułem *O faktach leżących u podstaw geometrii.*

Ale sprawę bezczelnie jasno postawił dopiero fizyk, Hermann Helmholtz, publikując (1868) pracę, w której odbiera matematyce walor nauki przyrodniczej, traktując ją jako skrzynkę z narzędziami dla nauk przyrodniczych.

I tak sprawa ponownie trafiła na pole filozofii. Jeśli bowiem prawd matematycznych nie weryfikuje przyroda, to skąd one się biorą? I czym w istocie, jeśli nie pochodzą z natury, są pojęcia matematyki? Tego rodzaju pytania stały się powodem powstania dyscypliny zwanej podstawami matematyki lub metamatematyką, która święciła swoje triumfy w XX wieku, choć przyniosła jako swoje rezultaty wielkie **nie wiadomo**.

Natomiast badanie tego, jak rozmaite kształty może przyjmować przestrzeń, stało się pierwszoplanowym zadaniem matematyków. Jeszcze Klein opisał wszystkie możliwe kształty przestrzeni dwuwymiarowych. Andriej Markow (syn) dowiódł, że zrobienie kompletnej systematyki kształtów przestrzeni o wymiarach większych od trzech nie jest możliwe, a ostatnio Grigorij Perelman sklasyfikował wszystkie możliwe kształty przestrzeni trójwymiarowych, czyli wszystkie teoretycznie możliwe kształty przestrzeni.

Praca Markowa mówi, że nie istnieje algorytm, który dla danych dwóch rozmaitości o wymiarze większym od trzech orzeka, czy są one jednakowo zbudowane (homeomorficzne).

Marek KORDOS