Przecięcia płaszczyzn

Joanna JASZUŃSKA

Deltoid 92

Dwie nierównoległe płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej. Ta niepozorna obserwacja bywa bardzo przydatna.

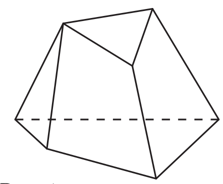
1. Czy rysunek 1 przedstawia wielościan?

2. Czworościan $ABCD$ przecięto płaszczyzną, uzyskując w przekroju czworokąt $KLMN$. Na rysunku 2 wyznacz punkt N, posługując się jedynie linijką.

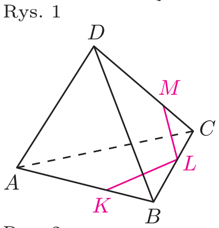
3. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość 2. Długości pozostałych boków tego trapezu są równe 1. Punkt S jest wierzchołkiem ostrosłupa o podstawie $ABCD$, w którym $SA = SB = 2$, $SC = SD = \sqrt{3}$. Wyznacz stosunek objętości tego ostrosłupa do objętości czworościanu foremnego o krawędzi 1.

4. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 1. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przecinającą jego wszystkie krawędzie boczne i uzyskano w przekroju czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

5. Dany jest sześcian o podstawie $ABCD$ i krawędziach bocznych AA', BB', CC', DD'. Wyznacz miarę kąta dwuściennego między płaszczyznami ABD' i $AB'D$.



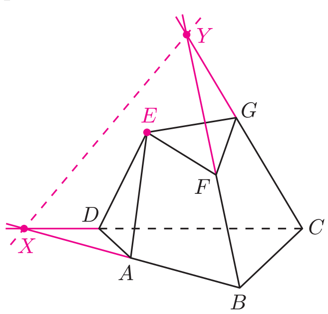
Rys. 1



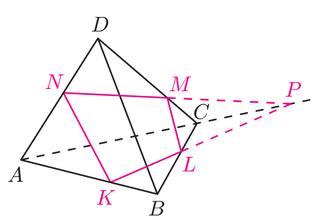
Rys. 2

Rozwiązania

R1. Przednia i tylna ściana danej figury mają wspólny wierzchołek, zatem nie są równoległe. Niech X i Y oznaczają odpowiednio punkty przecięcia prostych AB z CD oraz BF z CG (rys. 3). Wówczas każdy z punktów X, Y należy do obu płaszczyzn rozważanych powyżej ścian, a więc też do ich wspólnej prostej. Jednak punkty X, Y, E nie są współliniowe, zatem rysunek 1 nie przedstawia wielościanu. $\square$



Rys. 3



Rys. 4

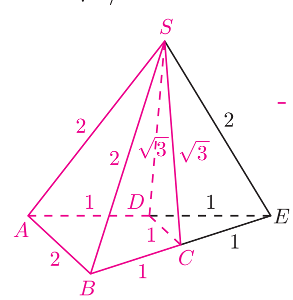
R2. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych KL i AC (rys. 4). Punkt ten leży w płaszczyźnie przekroju, zatem leży w niej też prosta PM. Stąd brakujący punkt N to punkt przecięcia prostych PM i AD. $\square$

R3. Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC (rys. 5). Z kształtu trapezu $ABCD$ wynika, że $AE = BE = AB = 2$ oraz że jego pole to $3/4$ pola trójkąta ABE.

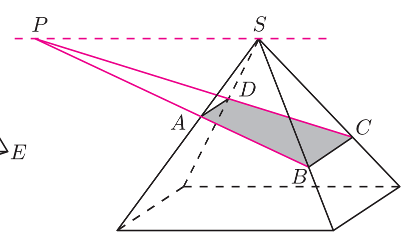
Z długości krawędzi trójkąta BCS wnioskujemy, że jest on połową trójkąta równobocznego o krawędzi 2. Ponieważ $SC \perp BC$ oraz $BC = CE$, więc $SE = SB = 2$.

Stąd czworościan $ABES$ jest foremny o krawędzi 2. Jego objętość jest zatem 8-krotnie większa od objętości czworościanu foremnego o krawędzi 1, więc szukany stosunek objętości równy jest $8 \cdot 3/4 = 6$. $\square$

R4. Prosta AB leży w płaszczyźnie przedniej ściany ostrosłupa z rysunku 6, a prosta CD w płaszczyźnie tylnej ściany, więc punkt P należy do obydwu tych płaszczyzn. Ich częścią wspólną jest prosta równoległa do podstawy ostrosłupa (gdyż jest on prawidłowy) i przechodząca przez wierzchołek S. Stąd jedyną wartością, jaką może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy, jest wysokość ostrosłupa równa $\sqrt{2}/2$. $\square$



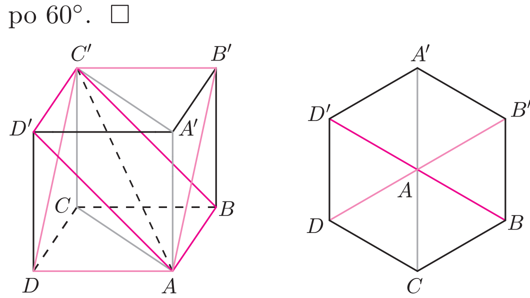
Rys. 5



Rys. 6

R5. Krawędzie AB i $C'D'$ są równoległe, leżą więc w jednej płaszczyźnie ABD'. Stąd punkt C' też do niej należy; podobnie należy on także do $AB'D$. Punkty A, A', C, C' również leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 7).

Powyższe trzy płaszczyzny mają wspólną prostą AC' i każda z nich zawiera inną z trzech krawędzi wychodzących z wierzchołka A. Oznacza to, że płaszczyzny te tworzą równe kąty dwuścienne, czyli kąty po $60°$. $\square$



Rys. 7. Sześcian i jego widok wzdłuż przekątnej AC'

Zadanie 1 pochodzi z gazetki Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów *Kwadrat* nr 7, a zadanie 4 z III OMG.