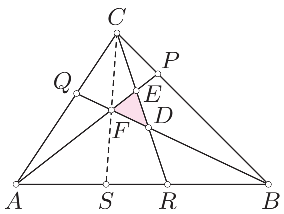


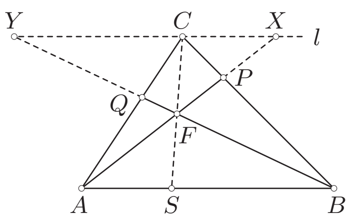
Rys. 1

Pod nazwą *twierdzenie Routha* rozumie się na ogół dwie równości: opisującą pole trójkąta $[DEF]$ (której dowód znajduje się obok) i bardziej znaną, opisującą pole trójkąta $[PQR]$, a mianowicie

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{pqr+1}{(p+1)(q+1)(r+1)}.$$

Inaczej o całym twierdzeniu pisaliśmy w *Delcie* 3/2012 i 6/2011.

Redakcja



Rys. 2

Krótki dowód twierdzenia Routha

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, a P, Q, R punktami leżącymi odpowiednio na bokach BC, CA, AB (rys. 1). Przyjmijmy, że $D = BQ \cap CR$, $E = CR \cap AP$, $F = AP \cap BQ$ oraz niech

$$\frac{BP}{PC} = p, \quad \frac{CQ}{QA} = q, \quad \frac{AR}{RB} = r.$$

Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$, mamy następujący wzór

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{(pqr-1)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+rp)},$$

znany pod nazwą *twierdzenia Routha*.

Dowody tego wzoru, które można znaleźć w dostępnej literaturze, używają na ogół rachunku wektorowego lub geometrii analitycznej. Podamy tutaj krótki geometryczny dowód tego twierdzenia.

Poprowadźmy przez punkt C prostą l równoległą do prostej AB. Niech ponadto $X = AP \cap l$, $Y = BQ \cap l$, a także $S = CF \cap AB$ (rys. 2) Korzystając z twierdzenia Talesa, uzyskujemy

$$(*) \qquad \frac{1}{p} + q = \frac{PC}{BP} + \frac{CQ}{QA} = \frac{CX}{AB} + \frac{CY}{AB} = \frac{XY}{AB} = \frac{XF}{FA} = \frac{CF}{FS}.$$

Wobec tego

$$\frac{[ABC]}{[ABF]} = \frac{CS}{FS} = 1 + \frac{CF}{FS} = 1 + \frac{1}{p} + q = \frac{1+p+pq}{p}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{[ABC]}{[BCD]} = \frac{1+q+qr}{q} \quad \text{oraz} \quad \frac{[ABC]}{[CAE]} = \frac{1+r+rp}{r}.$$

Stąd ostatecznie obliczamy:

$$\begin{aligned}\frac{[DEF]}{[ABC]} &= 1 - \frac{[ABF]}{[ABC]} - \frac{[BCD]}{[ABC]} - \frac{[CAE]}{[ABC]} = \\ &= 1 - \frac{p}{1+p+pq} - \frac{q}{1+q+qr} - \frac{r}{1+r+rp} = \\ &= \frac{(pqr-1)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+rp)},\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Uwaga. Udowodniona tożsamość $(*)$ nosi nazwę *twierdzenia van Aubela*.

Waldemar POMPE

Polecamy bardzo trudne zadanie

W znakomitych *100 zadaniach* Steinhausa jako zadanie szesnaste znajdujemy:

Mamy dowolny trójkąt. Możemy go oczywiście przeciąć linią prostą tak, żeby przepołowić jego obwód. Możemy nawet z góry przypisać kierunek linii przecinającej. Gdy zrobimy to dwa razy, używając dwu różnych kierunków, linie proste przetną się w pewnym punkcie Q. Wtedy przez punkt Q wiodą dwie linie proste przepoławiające obwód.

Czy istnieje punkt, przez który wiodą trzy takie linie? Jeśli tak, to jak go znaleźć?

Odpowiedź jest zaskakująca: przez każdy punkt, przez który przechodzą dwie proste połowiące obwód, przechodzi też trzecia mająca tę własność.

A trudność w znalezieniu odpowiedzi leży w tym, że trzeba jakoś scharakteryzować możliwe położenia punktu Q, o którym jest mowa w zadaniu – okazuje się, że są to punkty trójkąta krzywoliniowego zawierającego w brzegu łuki trzech paraboli stycznych do dwóch spośród prostych zawierających boki trójkąta.

Ciekawe jest to, że wynik jest mocniejszy: przez każdy punkt trójkąta przechodzi albo dokładnie jedna, albo dokładnie trzy proste połowiące obwód; to samo dotyczy czworokąta niebędącego równoległobokiem (a jak jest dla niego?).

Nie wątpię, że Czytelnik Ambitny podejmie to wyzwanie.

M.K.