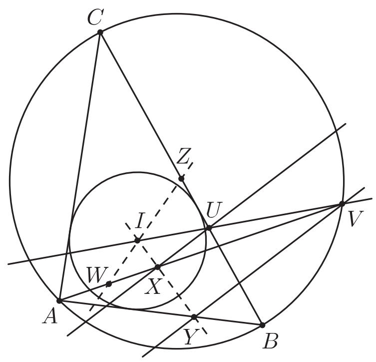
Okrąg dowpisany

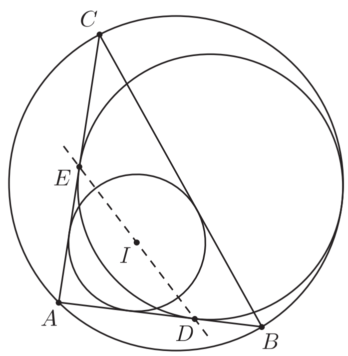
*Mieszko KOMISARCZYK**

Problem, który opiszę, został zaproponowany przez Amerykanów na LV Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, a jego treść brzmi następująco:

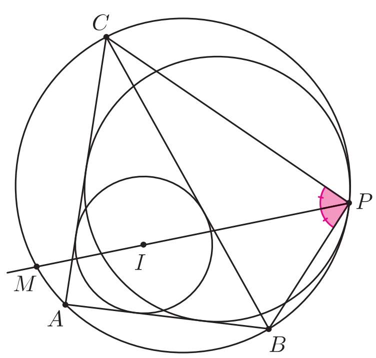


Zadanie 1. *Dany jest trójkąt ABC. Niech Ω będzie okręgiem nań opisanym, a I środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Prosta, przechodząca przez I, prostopadła do CI, przecina odcinek BC i łuk BC (niezawierający punktu A) okręgu Ω w punktach U oraz V. Niech prosta równoległa do AI, poprowadzona przez U, przecina odcinek AV w punkcie X, a prosta równoległa do AI, poprowadzona przez V, tnie odcinek AB w Y. Oznaczmy kolejno przez W, Z środki odcinków AX, BC. Udowodnić, że jeżeli punkty I, X, Y są współliniowe, to również punkty W, I, Z są współliniowe.*

Treść tego zadania wygląda bardzo skomplikowanie. Poczyniono wiele założeń, które na pierwszy rzut oka trudno ze sobą połączyć. Pokażę jednak, że to zadanie można rozwiązać w bardzo elegancki sposób, używając kilku lematów związanych z tzw. *mixtilinear incircle.* Jest to okrąg, który nie ma fachowej nazwy po polsku, dlatego pozwolę sobie zaproponować dość luźne tłumaczenie tego terminu na *okrąg dowpisany.* Jego definicja jest następująca: okrąg dowpisany do trójkąta ABC dla wierzchołka A jest to okrąg styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na ABC oraz styczny do prostych AB i AC. Zaprezentuję 3 lematy, które przybliżą nam jego własności.

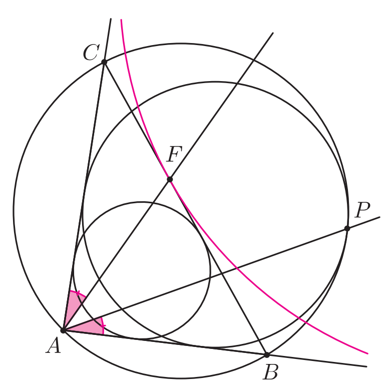


Lemat 1. *Dany jest trójkąt ABC, okrąg nań opisany Ω oraz doń dowpisany dla wierzchołka A. Przez I oznaczmy środek okręgu wpisanego w ABC i niech D, E będą punktami styczności okręgu dowpisanego z bokami AB, AC. Wówczas I jest środkiem odcinka DE.*



Dowód. Wykażę, że punkty D, I, E są współliniowe. Wtedy to, że I jest środkiem odcinka DE, będzie wynikało z tego, że $AE = AD$. Niech P będzie punktem styczności okręgu dowpisanego z Ω. Korzystając z tezy zadania M1468 z *Delty* 9/15, otrzymujemy, że PD i PE połowią łuki AB, AC, niezawierające kolejno C, B. Oznaczmy więc środki tych łuków przez M_1, M_2. Widzimy teraz, że CM_1 jest dwusieczną $\sphericalangle ACB$, a BM_2 jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$. To implikuje współliniowość punktów M_1, I, C oraz M_2, I, B. Współliniowość D, I, E jest teraz konsekwencją twierdzenia Pascala zastosowanego do sześciokąta ABM_2PM_1C. □

Lemat 2. *Przyjmijmy oznaczenia z poprzedniego lematu. Przez M oznaczmy drugi punkt przecięcia PI z Ω. Wtedy M jest środkiem łuku BC zawierającego A.*



Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że $AB < AC$ (gdy $AB = AC$, teza lematu jest trywialna, bo $A = M$). Musimy wykazać, że $\sphericalangle BPM = \sphericalangle CPM$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BPM = \sphericalangle BPM_1 + \sphericalangle M_1PA + \sphericalangle APM,$$
$$\sphericalangle CPM = \sphericalangle CPM_2 + \sphericalangle M_2PM.$$

Z racji tego, że AP jest zawarty w symedianie DPE, a z poprzedniego lematu wiemy, że I jest środkiem odcinka DE, mamy równość $\sphericalangle M_1PA = \sphericalangle M_2PM$ (o symedianach można przeczytać więcej w *Delcie* 2/2015 i 5/2015). Ponadto

$$\sphericalangle BPM_1 + \sphericalangle APM = \sphericalangle M_1PA + \sphericalangle APM = \sphericalangle M_2PM + \sphericalangle APM =$$
$$= \sphericalangle M_2PA = \sphericalangle CPM_2,$$

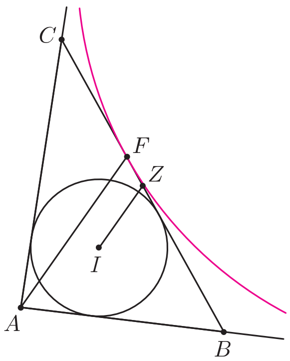
co w połączeniu z poprzednią równością daje tezę. □

Lemat 3. *Ponownie przyjmijmy oznaczenia jak w poprzednich lematach. Niech F będzie punktem styczności okręgu dopisanego do ABC naprzeciw wierzchołka A. Wynika stąd, że $\sphericalangle CAF = \sphericalangle BAP$.*

*uczeń XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

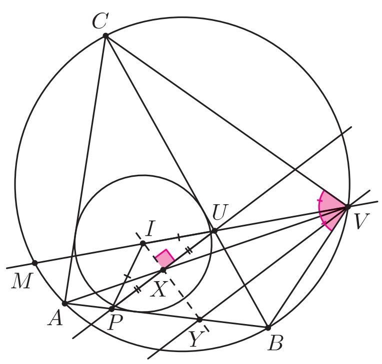
Dowód. Rozważmy inwersję o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej $\sphericalangle BAC$. Obrazem B w tym przekształceniu jest C, czyli obraz C to B. Zatem Ω przechodzi na prostą BC, a BC na Ω. Widzimy więc, że okrąg dowpisany przejdzie na wspomniany okrąg dopisany, skąd wynika, że obrazem P w tym przekształceniu jest F, co implikuje, że AP i AF są symetryczne względem dwusiecznej $\sphericalangle BAC$. To już jest równoważne z tezą lematu. □

Do rozwiązania zadania przyda się nam jeszcze pewien olimpijski fakt, którego znajomość może okazać się bardzo użyteczna na różnych konkursach matematycznych.



Lemat 4. *Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a Z środkiem boku BC. Punkt F jest punktem styczności okręgu dopisanego do ABC do boku BC. Wówczas odcinki AF oraz IZ są równoległe.*

Dowód. Niech G będzie punktem styczności okręgu wpisanego do boku BC, a H punktem przecięcia prostej AF z okręgiem wpisanym (tym, który jest bliżej A). Rozważmy jednokładność o środku w A, która przekształca okrąg dopisany do boku BC trójkąta ABC na okrąg wpisany w ten trójkąt. Prosta BC, styczna w punkcie F do okręgu dopisanego, przechodzi pod działaniem tej jednokładności na prostą styczną do okręgu wpisanego w punkcie H, równoległą do BC. W tej sytuacji HG jest średnicą okręgu wpisanego. Pozostaje zauważyć, że $CF = BG$ (Czytelnikom, którzy nie spotkali się z tą równością, pozostawiamy ją jako sympatyczne zadanie), w związku z czym Z jest środkiem FG i dlatego z twierdzenia Talesa wynika $AF \parallel IZ$. □



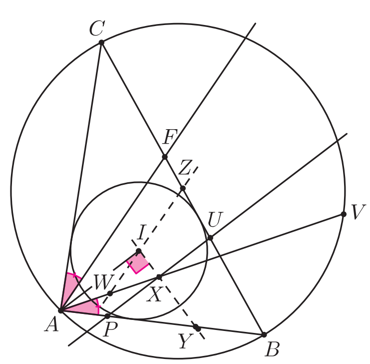
Przystąpmy teraz z powyższym arsenałem do rozwiązania naszego głównego problemu. Przez $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ będę oznaczał kolejno kąty przy wierzchołkach A, B, C. Niech prosta VI przecina Ω w M (różnym od V). Zauważmy, że $\sphericalangle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle C) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle B$. Z kolei $\sphericalangle MIC = 90^\circ$ pociąga za sobą $\sphericalangle MIA = \frac{1}{2}\sphericalangle B$, a ponieważ $VY \parallel AI$, więc $\frac{1}{2}\sphericalangle B = \sphericalangle YVI = \sphericalangle YBI$, co oznacza, że czworokąt $YBVI$ możemy wpisać w okrąg. Niech $P = XU \cap AB$. W podobny sposób pokazujemy, że czworokąt $BUIP$ można wpisać w okrąg. Łącząc te spostrzeżenia, otrzymujemy następujące zależności: $\sphericalangle IUP = \sphericalangle IBP = \sphericalangle IBU = \sphericalangle IPU$, zatem $PI = UI$. Stosując teraz twierdzenie Talesa do kątów $\sphericalangle IYA$ i $\sphericalangle YIV$, dostajemy:

$$\frac{XP}{IA} = \frac{XY}{IY} = \frac{UV}{IV} = \frac{UX}{IA},$$

skąd wynika, że $XP = UX$, czyli X jest środkiem PU. Mamy więc $IX \perp PU \parallel AI$. Wynika stąd, że

$$90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle A = \sphericalangle AYI = \sphericalangle BVI,$$

skąd otrzymujemy, że M jest środkiem łuku BAC. Na mocy lematu 2. wiemy więc, że V jest punktem styczności okręgu dowpisanego do ABC dla wierzchołka A. Jeżeli teraz przez F oznaczymy punkt styczności okręgu dopisanego do ABC naprzeciw A z BC, to z lematu 3. dostaniemy, że $\sphericalangle BAV = \sphericalangle CAF$. Wynika stąd, że AI zawiera się w dwusiecznej kąta FAV, co w połączeniu z tym, że trójkąt AIX jest prostokątny, pozwala prosto wywnioskować, że $WI \parallel AF$. Z drugiej strony, na mocy lematu 4. dostajemy $IZ \parallel AF$, tak więc $WI \parallel IZ$, co oczywiście pociąga za sobą tezę zadania.



Czytelników zatrwożonych stopniem skomplikowania powyższego rozumowania pocieszę tym, że problem został uznany przez jury za najtrudniejszy z geometrycznych. Widać, że znajomość faktów dotyczących okręgu dowpisanego była kluczowym elementem naszego rozwiązania. Czytelnik Uważny może się zastanawiać, czy współliniowość punktów X, I, Y daje jakieś konkretne zależności, które musi spełniać ABC. Okazuje się, że istotnie jego boki spełniają zależność $3AB = BC + AC$. Wykazanie tego faktu pozostawiam Czytelnikom Ambitnym jako olimpijskie ćwiczenie.