Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

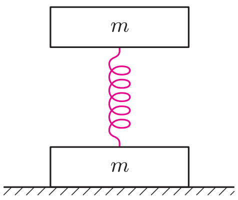
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

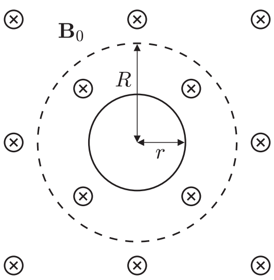
Przypominamy treść zadań:

616. Układ złożony z dwóch jednakowych płytek o masach m połączonych nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k, znajduje się w stanie równowagi (rys. 1). Górną płytkę naciśnięto tak, że opuściła się ona o x, a następnie puszczono. Na jaką maksymalną wysokość podniósł się środek masy układu?



Rys. 1

617. Na zewnątrz powierzchni walcowej o promieniu r wartość wektora indukcji pola magnetycznego rośnie liniowo w czasie: $B_0 = \alpha t$. Linie pola magnetycznego są równoległe do osi walca (rys. 2). Jak musi zmieniać się w czasie wartość jednorodnego pola magnetycznego wewnątrz tej powierzchni, aby elektron poruszał się po okręgu o promieniu $R > r$? W chwili $t = 0$ elektron spoczywa.



Rys. 2

616. Ciągła linia na rysunku 3 oznacza położenie równowagi – sprężyna jest ściśnięta o mg/k. Dolna płytka oderwie się od podłoża, gdy siła F powodująca dodatkowe ściśnięcie sprężyny o x będzie większa od ciężaru układu, czyli spełniony będzie warunek $x > 2mg/k$. W chwili oderwania sprężyna będzie wydłużona o $y = mg/k$. Prędkość v górnej płytki w chwili oderwania dolnej znajdujemy z zasady zachowania energii:

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2mg\,(x_1 + y) + \frac{ky^2}{2}, \text{ gdzie } x_1 = \frac{mg}{k} + x.$$

Stąd

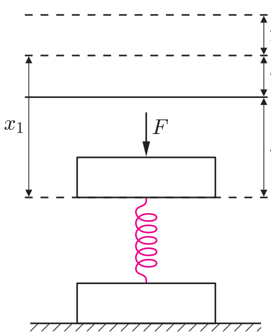
$$v^2 = \frac{kx^2}{m} - \frac{4mg^2}{k}.$$

Prędkość środka masy układu w momencie oderwania to $V = v/2$. Po oderwaniu środek masy porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym i wznosi się na wysokość

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{kx^2}{8mg} - \frac{mg}{2k}.$$

Wysokość, na jaką wzniesie się środek masy układu od chwili rozpoczęcia ruchu, wynosi $H = h + (x_1 + y)/2$. Jeśli $x \leqslant 2mg/k$, dolna płytka pozostaje w spoczynku, a górna porusza się ruchem harmonicznym wokół położenia równowagi z amplitudą x, czyli wznosi się na maksymalną wysokość $2x$. Zatem odpowiedź na postawione pytanie jest następująca: maksymalna wysokość, na jaką wzniesie się środek masy układu, dana jest wzorem:

$$H = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{kx}{4mg}\right) + \frac{mg}{2k}, \text{ gdy } x > \frac{2mg}{k}; \quad H = x, \text{ gdy } x \leqslant \frac{2mg}{k}.$$



Rys. 3

617. Szukane pole magnetyczne ma linie równoległe do B_0 , ponieważ wewnątrz powierzchni walcowej nie płynie żaden prąd. Jeżeli elektron porusza się po okręgu o promieniu R i ma w danej chwili prędkość v, to działająca na niego siła dośrodkowa jest siłą Lorentza: $mv^2/R = evB_0$, zatem jego prędkość $v = eR\alpha t/m$ rośnie liniowo w czasie. Prędkość tę uzyskuje elektron dzięki sile elektrycznej $F_E = ma = eR\alpha$. Wektor natężenia pola elektrycznego o długości $E = \alpha R$ jest styczny do okręgu. Z prawa Maxwella wiemy, że krążenie pola elektrycznego wzdłuż okręgu o promieniu R ma wartość bezwzględną

$$|K_E| = 2\pi RE = \frac{\left|\Delta\phi_{B_0} + \Delta\phi_{B_1}\right|}{\Delta t},$$

gdzie $\Delta\phi_{B_0} = \pi\alpha\Delta t\left(R^2 - r^2\right)$ jest zmianą w czasie Δt strumienia pola B_0 przez powierzchnię objętą okręgiem, $\Delta\phi_{B_1}$ jest zmianą strumienia szukanego pola B_1. Ponieważ E nie zależy od czasu, B_1 musi być liniową funkcją czasu:

$$B_1 = \beta t, \quad \Delta\phi_{B_1} = \pi r^2 \beta\Delta t.$$

Wartość szukanego pola magnetycznego dana jest wzorem:

$$B_1 = \frac{\alpha t\left(R^2 + r^2\right)}{r^2};$$

zwrot linii pola magnetycznego jest zgodny z B_0.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2016

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

719. Czternaścioro ludzi prezentowało swoje umiejętności w serii występów (TV-show?); w pojedynczym występie mogła uczestniczyć dowolna liczba osób. Było to siedem par małżeńskich – ale małżonkowie nigdy nie wystąpili razem. Za to każda inna para osób (dowolnej płci) uczestniczyła jednocześnie w dokładnie jednym występie. Wiadomo ponadto, że pewna osoba uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Jaka jest minimalna liczba występów, przy której te warunki mogły być spełnione?

720. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą s taką, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$(x-1)^{2n} + (x+1)^{2n} \leqslant 2(x^2+s)^n.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 713 ($WT = 3{,}51$) i 714 ($WT = 1{,}20$) z numeru 1/2016

Stanisław Bednarek	Łódź	44,55
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Paweł Kubit	Kraków	38,74
Marek Gałecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Witold Bednarek	Łódź	33,95
Janusz Olszewski	Warszawa	33,36

Stanisław Bednarek – to już *44* po raz drugi.

719. Niech A_0 będzie tą osobą, która uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Przyjmijmy, że to pani; jej mąż otrzymuje oznaczenie B_0. Pozostałe pary małżonków: (A_i, B_i); $i = 1, \ldots, 6$. W jednym swoim występie pani A_0 musiała się pokazać w towarzystwie połowy tych ludzi; w drugim – z pozostałą połową. Ustalmy oznaczenia tak, że w jednym z tych występów uczestniczyły osoby $A_0, A_1, \ldots, A_6$, a w drugim $A_0, B_1, \ldots, B_6$. I znów, bez straty ogólności, możemy przyjąć (dla wygody języka), że osoby A_i to panie, a B_i panowie (w kontekście tego zadania szybka zmiana płci to nie problem).

W każdym z pozostałych występów mogły uczestniczyć, oprócz pana B_0, co najwyżej dwie osoby – bo gdyby więcej, to byłyby/byliby wśród nich dwie panie lub dwaj panowie; a przecież one/oni już się pokazali wspólnie, wraz z panią A_0.

Każda para (A_i, B_j), gdzie $i, j \geqslant 1$, $i \neq j$, musiała raz wspólnie wystąpić; i były to różne występy. Jest 30 takich par. Uwzględniając dwa występy z udziałem pani A_0, widzimy, że liczba występów musiała wynieść co najmniej 32.

Czy realizacja tej wartości jest wykonalna? Trzeba zapewnić panu B_0 wspólne uczestnictwo z każdą osobą poza panią A_0. Uzyskamy to, dołączając go (na przykład) do par (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_3, B_4), (A_4, B_3), (A_5, B_6), (A_6, B_5). Zostaną przez to spełnione wszystkie wymagane warunki. Tak więc szukane minimum wynosi 32.

720. Oznaczmy przez $L_s(x)$ oraz $P_s(x)$ lewą oraz prawą stronę napisanej nierówności. Ponieważ

$$L_s(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2n-2k},$$

$$P_s(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2n-2k} s^k,$$

zatem połowa ich różnicy to wielomian parzysty zmiennej x (z parametrem s)

$$\frac{P_s(x) - L_s(x)}{2} = c_1 x^{2n-2} + c_2 x^{2n-4} + \ldots + c_{n-1}x^2 + c_n$$

o współczynnikach

$$c_k = \binom{n}{k} s^k - \binom{2n}{2k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Aby ten wielomian przyjmował wyłącznie wartości nieujemne, musi być spełniony warunek $c_1 \geqslant 0$, czyli $ns - n(2n-1) \geqslant 0$, czyli $s \geqslant 2n-1$.

Pokażemy, że jest to jednocześnie warunek dostateczny. Wystarczy wykazać, że jeśli $s \geqslant 2n-1$, to wszystkie współczynniki c_k są nieujemne. Indukcja: baza ($c_1 \geqslant 0$) już gotowa. Ustalmy $k \geqslant 1$ i przyjmijmy założenie indukcyjne $c_k \geqslant 0$, czyli

$$\binom{n}{k}\binom{2n}{2k}^{-1} s^k \geqslant 1.$$

Teza indukcyjna ($c_{k+1} \geqslant 0$) ma analogiczną postać, z k zastąpionym przez $k+1$. Piszemy więc to wyrażenie i zaczynamy je przekształcać:

$$\binom{n}{k+1}\binom{2n}{2k+2}^{-1} s^{k+1} =$$
$$= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{2n}{2k}^{-1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2n-2k)(2n-2k-1)} \cdot s^{k+1} =$$
$$= \binom{n}{k}\binom{2n}{2k}^{-1} s^k \cdot \frac{2k+1}{2n-2k-1} \cdot s;$$

stąd i z założenia indukcyjnego,

$$\binom{n}{k+1}\binom{2n}{2k+2}^{-1} s^{k+1} \geqslant \frac{2k+1}{2n-2k-1} \cdot s \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(2k+1)(2n-1)}{2n-2k-1} > 1,$$

i mamy tezę indukcyjną. Tak więc $c_k \geqslant 0$ dla $k = 1, \ldots, n$, wobec czego $P_s(x) - L_s(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Otrzymaliśmy odpowiedź: najmniejsza wartość parametru s, dla której $P_s(x) \geqslant L_s(x)$ (dla $x \in \mathbb{R}$), wynosi $s = 2n-1$.