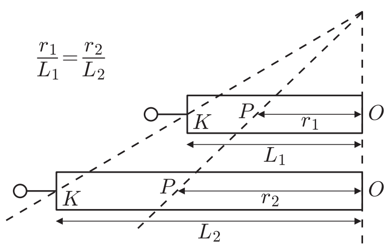
e z gumy

Bartosz SMOCZYŃSKI*

Filmik demonstrujący opisane w tekście doświadczenie można odnaleźć na stronie `deltami.edu.pl`

Jak znaleźć e na gitarze? Nawet początkujący gitarzysta wie, że przy standardowym nastrojeniu właśnie taki dźwięk wydają dwie skrajne struny. My jednak będziemy szukać innego e, a mianowicie pewnej znanej i przydatnej stałej matematycznej. Powiedzmy, że z jakiegoś powodu chcemy poddać próbie wytrzymałość strun. W tym celu kręcimy kołkiem do momentu, w którym długość nawiniętej na niego części struny będzie taka sama, jak długość części nienawiniętej. Pytanie brzmi: ilukrotnie w takim procesie musiałaby rozciągnąć się struna? Aby udzielić na nie odpowiedzi, rozważymy analogiczną sytuację, w której zamiast strun przyglądamy się gumie.

Uzbrójmy się zatem w długi pas rozciągliwej gumy, której jeden koniec unieruchamiamy w początkowym punkcie zaczepienia O. Drugi koniec wyposażamy w uchwyt, by dało się ją swobodnie rozciągać. Potrzebna też będzie powierzchnia (np. stół), na której kładziemy gumę tak, aby można było wygodnie mierzyć odległości. Zwróćmy uwagę, że rozciąganie gumy nie zmienia stosunku odległości między umieszczonymi na niej punktami. Ściślej, dla pewnego punktu P, zaznaczonego na gumie, jeśli $d(t)$ oznacza jego odległość od punktu zaczepienia O w chwili t, a $L(t)$ długość gumy, to zachodzi proporcja



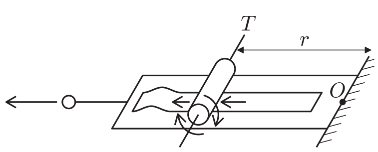
Rys. 1

$$\frac{d(t_1)}{L(t_1)} = \frac{d(t_2)}{L(t_2)}, \quad \text{dla dowolnych } t_1, t_2 > 0. \tag{1}$$

Można więc wprowadzić wielkość $q = \frac{d}{L}$, opisującą *umiejscowienie* punktu na gumie, niezależną od rozciągnięcia gumy. Różniczkując równanie $d = qL$ względem t, można otrzymać wyrażenie na prędkość $\dot{d}$ punktu P

$$\dot{d}(t) = q\dot{L}(t) = \frac{d(t)}{L(t)}\dot{L}(t) = d(t)\big(\ln L(t)\big)'. \tag{2}$$

W odległości r od O umieśćmy teraz nad gumą stykający się z nią, swobodnie obracający się walec, którego oś przytwierdzona jest do stołu. Rozciągająca się pod nim guma będzie powodowała jego obrót. Za pomocą wstęgi materiału umieszczonej między walcem a gumą możemy zmierzyć długość drogi, jaką przebył punkt dowolnie ustalony na obwodzie walca (rys. 2) i wielkość tę oznaczymy przez Δx. Przyjmijmy, że rozciąganie przebiega w przedziale czasowym (t_0, t_1). Okazuje się, że wygodnie będzie obliczyć szukaną wartość, zaczynając od wyznaczenia prędkości $v(t)$ przesuwania się gumy pod walcem w dowolnej chwili t. Z (2) można wywnioskować, że



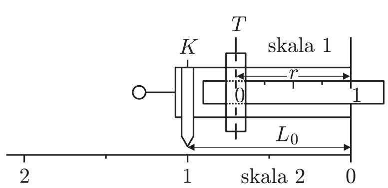
Rys. 2

$$v(t) = r\big(\ln L(t)\big)'.$$

Aby wyznaczyć przesunięcie Δx, pozostaje scałkować funkcję $v(t)$ względem czasu w przedziale (t_0, t_1), otrzymując $\Delta x = r \ln\big(L_1/L_0\big)$, gdzie $L_0 = L(t_0)$ i $L_1 = L(t_1)$. Zapiszmy uzyskany wynik w postaci

$$\frac{\Delta x}{r} = \ln \frac{L_1}{L_0}. \tag{3}$$

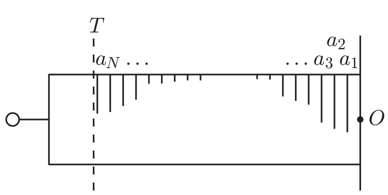
Pasek materiału możemy teraz wyposażyć w skalę, na której za jednostkę przyjmujemy r. W ten sposób odczytana tam niemianowana wartość x będzie wynosiła $\frac{\Delta x}{r}$. Umieśćmy też w punkcie końcowym K wskaźnik, którego przesunięcie będziemy mierzyć na drugiej skali, nieruchomej względem O, o jednostce L_0. Jej wskazanie D będzie więc wynosić $\frac{L_1}{L_0}$ (rys. 3). W ten sposób zależność (3) można uprościć do postaci



Rys. 3

$$x = \ln D \quad \text{czy też} \quad D = e^x.$$

Powyższy związek między wskazaniami na skalach pozwala nam więc na doświadczalne wyznaczenie liczby e (poprzez rozciąganie do chwili, gdy wartość na skali pierwszej wyniesie 1 i odczytanie wyniku na skali drugiej) lub, na przykład, $\ln 2$ (poprzez dwukrotne rozciągnięcie gumy i odczytanie wyniku na skali pierwszej).



Rys. 4

Zależność (3) można również wyznaczyć za pomocą mniej formalnego rozumowania, które nie wymaga całkowania funkcji. Połóżmy walec na końcu gumy, a między nim a początkiem gumy umieśćmy w równych odstępach N punktów pomiarowych i oznaczmy je, zaczynając od tego najbliżej O, przez $a_1, a_2, \ldots, a_N$ (rys. 4). Niech τ_i będzie momentem przejścia punktu a_i pod

*uczeń V LO im. Księcia Józefa Poniatowskiego w Warszawie