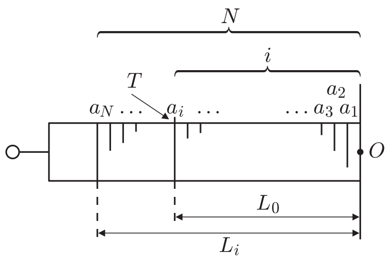
walcem. Obrót walca Δx będziemy wyznaczać, sumując składowe obroty $\mathrm{d}x_i$, z których każdy mierzony jest od chwili τ_{i+1} do chwili τ_i. Przez L_i oznaczymy długość gumy w chwili τ_i. Zauważmy, że dla wystarczająco dużej liczby N wartość $\mathrm{d}x_i$ można przybliżyć przez $\frac{L_i}{N}$. Oczywiste jest, że w chwili τ_i między walcem i początkiem gumy znajduje się i punktów pomiarowych, co z uwagi na równomierne rozmieszczenie punktów pomiarowych na gumie (rys. 5) daje proporcję: $i/N \approx L_0/L_i$. Jeśli końcowa długość gumy wyniosła L_1, to z powyższej proporcji wynika, że rozciąganie zakończyło się w chwili $i = \lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor$. Wobec tego możemy obliczyć

$$\Delta x = \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \mathrm{d}x_i = \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \frac{L_i}{N} \approx \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \frac{L_0}{i} = L_0 \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \frac{1}{i}.$$

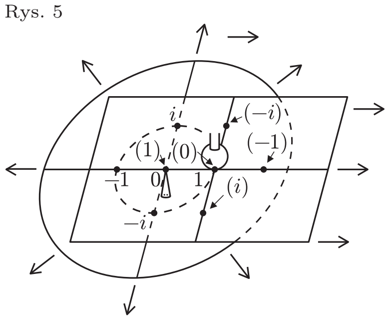
W tym miejscu możemy zastosować oszacowanie $\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} \approx \ln N$, skąd wreszcie, pomijając znak części całkowitej:

$$\Delta x = L_0\left(\ln N - \ln N\frac{L_0}{L_1}\right),$$

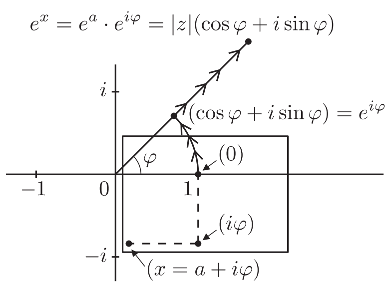
co jest równoważne z (3).



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Powstaje naturalne pytanie, czy nasze urządzenie można ulepszyć w taki sposób, by demonstrowało działanie funkcji wykładniczej dla argumentów zespolonych. Teoretycznie jest to możliwe. Pas gumy zastępujemy kwadratową, gumową płachtą, unieruchomioną w jednym punkcie, względem którego może się ona obracać. Jej rozciąganie będzie się odbywać równomiernie w obu kierunkach, równoległych do krawędzi płachty. Także pas materiału używany do pomiaru należy zamienić na materiałową płachtę. Obie skale uzupełniamy o oś urojoną, a w miejscu walca umieszczamy kulę dociskającą materiał do gumy. Podczas ruchów gumy materiał ma się przesuwać, ale nie obracać. Załóżmy, że w wyniku pewnego obrotu i rozciągnięcia gumy znajdujący się na niej wskaźnik został przemieszczony do punktu z, a wynik odczytany na skali materiałowej wyniósł x. Wykorzystując wcześniejsze rozważania oraz fakt, że obrót gumy o kąt φ przekłada się na zmianę odczytu na skali materiałowej o $i\varphi$, można stwierdzić, że wówczas $z = e^x$. Nasza konstrukcja w naturalny sposób rozszerza więc definicję funkcji wykładniczej na zespolone argumenty. Niestety, jej wykonanie w warunkach domowych nie wydaje się możliwe i należy ją rozpatrywać raczej w kategoriach doświadczenia myślowego niż propozycji do samodzielnego wykonania.

Mam nadzieję, że niniejszym tekstem choć na chwilę wyprowadziłem e z krainy matematycznych abstraktów i przekonałem Czytelnika, że nie trzeba wielkiego wysiłku, aby samemu je „upolować” w otaczającej nas rzeczywistości.

Brzydka prawda

Wielościan wypukły, którego ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi, może mieć ściany trójkątne, czworokątne lub pięciokątne. Ostatnie dwa przypadki realizują się tylko w postaci sześcianu i dwunastościanu. Pozostałe trzy wielościany foremne reprezentują pierwszy przypadek (czworościan, ośmiościan i dwudziestościan), ale nie są one jedynymi wielościanami wypukłymi, których ściany są trójkątami równobocznymi – np. „górna” i „dolna” piątka ścian dwudziestościanu składa się na dziesięciościan przypominający dysk.

Oznaczmy przez w liczbę wszystkich wierzchołków wielościanu, w_i – liczbę tych wierzchołków, w których zbiega się i ścian (oczywiście $i = 3$, 4 lub 5), przez k liczbę krawędzi i przez s liczbę ścian.

Aby znaleźć wszystkie takie wielościany, można rozumować tak:

$$3s = 2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5,$$

bo każda ściana ma trzy krawędzie, a każda krawędź należy do dwóch ścian, a także łączy dwa wierzchołki.

Ponieważ na dodatek $w = w_3 + w_4 + w_5$, więc wstawiając to do wzoru Eulera: $w - k + s = 2$, dla wygody pomnożonego przez 6, otrzymujemy

$$6(w_3+w_4+w_5)-3(3w_3+4w_4+5w_5)+2(3w_3+4w_4+5w_5) = 12,$$

czyli

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12.$$

To równanie ma 19 rozwiązań w liczbach naturalnych: **4,0,0**; 3,1,1; 3,0,3; 2,3,0; 2,2,2; 2,1,4; 2,0,6; 1,4,1; 1,3,3; 1,2,5; 1,1,7; 1,0,9; **0,6,0**; 0,5,2; 0,4,4; 0,3,6; 0,2,8; 0,1,10; **0,0,12**.

Niestety, tylko osiem z nich (zaznaczone są kolorem) odpowiada wielościanowi wypukłemu (te grubszą czcionką to foremne).

I tu jest miejsce na zwrot *brzydka prawda*: fakt ten nosi dumną nazwę **twierdzenie Freudenthala–van der Waerdena**, ale mimo naturalnej materii, jakiej dotyczy, nie ma dotąd naturalnego i eleganckiego dowodu.

Więc może któryś z Czytelników?

M.K.