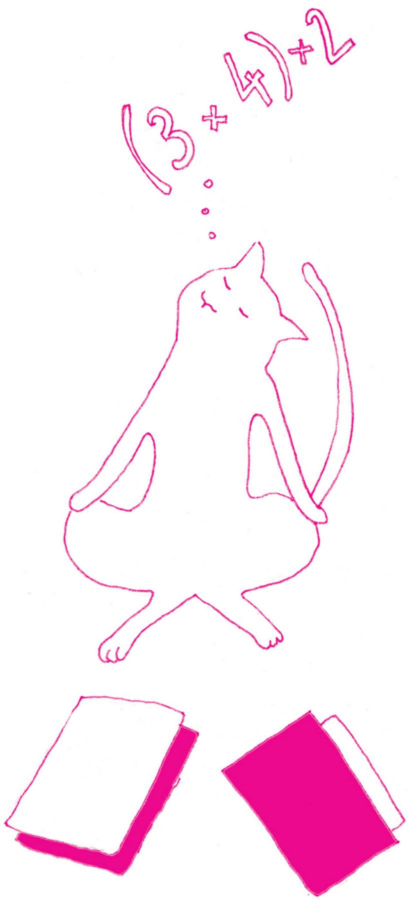
Matematyka wedyjska

*Julia SKAWIŃSKA**

„Matematyka wedyjska” to umowna nazwa zbioru algorytmów, które można zastosować, aby rozwiązać pewne rachunkowe problemy. Reguły te zostały sformułowane w XX wieku przez hinduskiego duchownego Bharatiego Kriszna Tirtha, który twierdził, że są one zapisane w hinduskich świętych księgach, Wedach. Bharati wyodrębnił szesnaście sutr i trzynaście powiązanych z nimi sutr zależnych (sub-sutr). Wedle dość swobodnej interpretacji świątobliwego męża opisują one algorytmy rozwiązywania problemów matematycznych: arytmetycznych, algebraicznych, geometrycznych i trygonometrycznych. Był to początek matematyki wedyjskiej w takiej postaci, w jakiej znamy ją dzisiaj. I choć co do wedyjskiego pochodzenia przedstawionych metod jest wiele poważnych wątpliwości, warto zwrócić uwagę na niektóre z tych rachunkowych skrótów.

Wedy to wiedza o świecie, która została objawiona wieszczom-poetom. Wiedza ta nie była tworem ludzi, lecz istniała zawsze. Pierwszą postacią, która ją otrzymała, był bóg Brahma, pierwsza istota we wszechświecie. On to podzielił się nią ze swoimi uczniami i synami.



Jednym z ciekawszych algorytmów jest sposób na podnoszenie do kwadratu za pomocą sutry *Gunita Samuccayah*, co po polsku oznacza: „produkt sumy”. Dzięki tej formule możemy w kilka sekund podnosić bardzo duże liczby do kwadratu. Po odrobinie ćwiczeń powinno to zająć tyle czasu, ile zajmuje zapisanie wyniku. Jeśli chcemy korzystać z tej sutry, musimy najpierw poznać twór nazywany *Duplexem*. Możemy to przetłumaczyć (niekoniecznie najdokładniej) jako podwojenie. Dla liczb jednocyfrowych Duplex będzie ich kwadratem. Dla liczb dwucyfrowych Duplex tworzymy poprzez pomnożenie obydwu cyfr i podwojenie ich iloczynu. Tak więc dla liczby 34 będzie to: $(3\cdot 4)\cdot 2$, co da nam 24; dla liczby 58: $(5\cdot 8)\cdot 2 = 80$ itd. Dla liczb trzycyfrowych Duplex tworzymy, mnożąc pierwszą i ostatnią cyfrę, podwajając ten wynik i dodając do niego środkową cyfrę podniesioną do kwadratu. Tak więc dla liczby 634 tworzymy takie działanie: $(6\cdot 4)\cdot 2 + 3^2$, co da nam 57; dla 452 będzie to: $(4\cdot 2)\cdot 2 + 5^2$, co będzie równe 41 itd. W oparciu o powyższe przykłady możemy stworzyć coś na kształt ogólnej zasady, na podstawie której tworzymy Duplex. Bierzemy pierwszą i ostatnią cyfrę, mnożymy i podwajamy, następnie dodajemy do tego wynik mnożenia drugiej i przedostatniej cyfry, również podwojony..., a jeśli jakaś cyfra zostanie bez pary, podnosimy ją do kwadratu i dodajemy do pozostałych wyników.

Teraz możemy przejść do właściwego podnoszenia do kwadratu. Jak Duplex nam w tym pomoże? Zacznijmy od prostych liczb: dwucyfrowych. Weźmy liczbę 23. Musimy pracować nad nią etapami. Pierwszy etap to wyliczenie Duplexu z 2, drugi to Duplex z 23 i ostatecznie z 3. Jeśli na jakimś etapie otrzymamy liczbę dwucyfrową, to cyfrę dziesiątek dodajemy do liczby znajdującej się po lewej stronie. Tak więc, oznaczając przez $d(n)$ Duplex liczby n:

$$23^2 = d(2)|d(23)|d(3) = 4|12|9 = 529; \quad 84^2 = d(8)|d(84)|d(4) = 64|64|16 = 7056.$$

Na razie, być może, nie wygląda na to, żeby ta metoda miała ułatwić obliczenia, poczekaj jednak, Czytelniku, na podnoszenie większych liczb do kwadratu.

Z liczbami trzycyfrowymi postępujemy podobnie. Na początku obliczamy Duplex z pierwszej cyfry, następnie z pierwszych dwóch, kolejny etap to Duplex z całej liczby, potem z dwóch ostatnich cyfr i na koniec z ostatniej. W ten sposób:

$$123^2 = d(1)|d(12)|d(123)|d(23)|d(3) = 1|4|10|12|9 = 15129,$$
$$236^2 = d(2)|d(23)|d(236)|d(36)|d(6) = 4|12|33|36|36 = 55696.$$

Na podstawie tych przykładów możemy dostrzec ogólną zasadę. Bierzemy pierwszą cyfrę, następnie pierwsze dwie, pierwsze trzy, i kolejne, aż obliczymy Duplex z całej liczby. Następnie opuszczamy kolejno początkowe cyfry, aż dojdziemy do ostatniej. Dzięki Duplexowi możemy bardzo szybko podnosić liczby do kwadratu, jednak skąd możemy mieć pewność, że metoda ta zadziała w każdym przypadku? Jeśli nie mamy do dyspozycji kalkulatora, to podnosimy liczby do kwadratu za pomocą mnożenia pisemnego. Przyjrzyjmy się dokładniej podniesieniu do kwadratu w ten sposób liczby 23. Zacznijmy od końca. Widzimy, że ostatnia cyfra 9 tworzy się przez pomnożenie 3 i 3. Tak więc jest to 3^2, czyli Duplex z 3. Następne są dwie szóstki, które po dodaniu dadzą nam 12. Jest to pomnożenie pierwszej i drugiej cyfry oraz ich podwojenie, czyli $(2\cdot 3)\cdot 2$, co jest Duplexem z 23. Pierwszą cyfrą jest cztery, które jest wynikiem pomnożenia 2 i 2, czyli 2^2, co, jak

$$\begin{array}{rr} & 23 \\ \times & 23 \\ \hline & 69 \\ + & 46 \\ \hline & 529 \end{array}$$

*uczennica Zespołu Szkół Ponadgimnazjalnych w Szprotawie wiemy, jest Duplexem z 2. Możemy przyjrzeć się podnoszeniu do kwadratu liczb wielocyfrowych, w każdym przypadku jest to analogia sposobu wedyjskiego.

$$\begin{array}{l} 9 \times 7 \quad {\scriptstyle -10} \\ \quad 9 \to -1 \\ \quad \underline{7 \to -3} \\ \qquad 6 \mid 3 = 63 \end{array}$$

Inną ciekawą zależnością jest *Nikhilam Navatascaram Dashtah*, która po polsku oznacza „wszystkie od 9, ostatnia od 10”. Brzmi to nieco niejasno i zapewne niewielu z Was, drodzy Czytelnicy, zgadło, że w formule tej chodzi o mnożenie liczb. Zacznijmy od prostego działania: $9 \cdot 7$. W nazwie tej sutry nie bez powodu pojawiła się dziesiątka. Przyjrzyjmy się pierwszej liczbie i wykonajmy na niej jedno proste działanie: $10 - 9 = 1$. Teraz to samo zróbmy z drugą: $10 - 7 = 3$. Naszym kolejnym krokiem będzie obliczenie cyfry jedności wyniku mnożenia $9 \cdot 7$. Mnożymy wyniki dwóch poprzednich działań: $1 \cdot 3$, co daje oczywiście trójkę. Zapisujemy ją w odpowiednim miejscu. Teraz czas na cyfrę dziesiątek wyniku. Tutaj mamy parę możliwości. Pierwszą z nich jest dodanie 9 do 7 i odjęcie od wyniku 10. Drugi sposób to odjęcie od dziesiątki 1 i 3. Trzecią możliwością jest odejmowanie krzyżowe, czyli od 9 odejmujemy 3, albo od 7 odejmujemy 1. Wszystkie te działania (wystarczy wykonać jedno) dają ten sam wynik: 6, co daje oczekiwany rezultat 63. Poniżej znajduje się tożsamość algebraiczna, uzasadniająca słuszność przedstawionej metody

$$(x-a)(x-b) = x(x-a-b) + ab.$$

$$\begin{array}{l} 7 \times 6 \quad {\scriptstyle -10} \\ \quad 7 \to -3 \\ \quad \underline{6 \to -4} \\ \qquad 3 \,|_1\, 2 = 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 83 \times 88 \quad {\scriptstyle -100} \\ \quad 83 \to -17 \\ \quad \underline{88 \to -12} \\ \qquad 71 \,|_2\, 04 = 7304 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 11 \times 12 \quad {\scriptstyle -10} \\ \quad 11 \to +1 \\ \quad \underline{12 \to +2} \\ \qquad 13 \mid 2 = 132 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 \times 8 \quad {\scriptstyle -10} \\ \quad 12 \to +2 \\ \quad \underline{8 \to -2} \\ \quad 10 \mid -4 = 96 \end{array}$$

W tej sutrze, podobnie jak w poprzedniej, gdy w „mniejszym” wyniku otrzymamy liczbę dwucyfrową, cyfrę dziesiątek dodajemy do cyfry jedności liczby znajdującej się po lewej stronie. Przy mnożeniu liczb dwucyfrowych metoda nie zmienia się szczególnie. Jedyna różnica to liczba, do której „dopełniamy”, w tym przypadku będzie to setka. Gdy „mniejszy” wynik ma więcej niż dwie cyfry, „nadmiar” dodajemy do liczby znajdującej się z lewej strony. Analogicznie dla mnożenia liczb trzycyfrowych „dopełnieniem” jest 1000. Sposób jest bardzo przyjemny. Kiedy czynniki mnożenia nieznacznie przekraczają 10 (lub 100, 1000 itd.) warto nie dopełniać do większej liczby postaci 10^a, a zająć się „nadwyżką” czynników (nadmiarem w stosunku do liczby 10^a, mniejszej niż czynniki). Gdy chcemy pomnożyć 12 i 11, co robić? Tym razem jednak to od 12 odejmujemy 10 i otrzymujemy dwa. To samo robimy z 11. Historia lubi się powtarzać, ale tym razem przy dwójce i jedynce zapisujemy plusy. Aby uzyskać prawą stronę (cyfrę jedności), robimy to samo co poprzednio – mnożymy 2 i 1. Zmiany natomiast występują po lewej stronie wyniku. Tym razem nie odejmujemy, a dodajemy liczby krzyżowo. W ten sposób uzyskujemy nasz wynik: 132. W przypadku, gdy mnożymy jedną liczbę powyżej dziesiątki i jedną poniżej, np. 12×8, musimy postępować według poniższych kroków: na początku wykonujemy dwa proste działania: $12 - 10 = 2$, $10 - 8 = 2$. Następnie zapisujemy nadwyżkę 10 z plusem, a niedobór z minusem. Kolejnym krokiem jest lewa strona: jest tu kilka dróg, jedną z nich jest odjęcie od 12 dwójki, albo dodanie 2 do 8. W obu przypadkach otrzymujemy dziesiątkę. Teraz pora na prawą stronę – tu szlak jest tylko jeden: musimy pomnożyć $2 \cdot -2$, w związku z czym otrzymujemy -4. Ten minus sugeruje, że to jeszcze nie koniec. Kiedy od dziesięciu odejmiemy 4, otrzymamy 6 i będzie to nasza prawa strona. Z lewą sprawa jest troszkę trudniejsza. Po prawej stronie mieliśmy liczbę jednocyfrową, dlatego od 10 odejmujemy 1 i otrzymujemy dziewiątkę, która jest naszą lewą stroną. W ten sposób otrzymujemy wynik: 96.

Mówiąc o tej sutrze, nie sposób nie wspomnieć o dwóch sub-sutrach, stworzonych do tej formuły. Nazywają się one: *Anurupyena* (co w wolnym tłumaczeniu oznacza „proporcjonalnie” lub „mnożenia”) oraz *Sishyate Seshasanjnah* (co oznacza: „reszta pozostaje stała”). Te sub-sutry są uzupełnieniem do wcześniejszej metody. Przy mnożeniu 41 i 41 wcześniejszą metodą należy pomnożyć 59 i 59, co nie jest łatwym działaniem (metoda nic nie upraszcza). W takich przypadkach stosujemy sub-sutry. Działanie 41×41 możemy wykonać na kilka sposobów:

$$\begin{array}{l} 41 \times 41 \quad {\scriptstyle -100/2} \\ \quad 41 \to -9 \\ \quad \underline{41 \to -9} \\ {\scriptstyle /2} \quad 32 \mid 81 \\ \qquad 16 \mid 81 = 1681 \end{array}$$

1. Zanim zaczniemy mnożenie, ustalamy „podstawę pracy” (mnożymy lub dzielimy 10^a przez liczbę naturalną, tak żeby wynik był zbliżony do czynników działania). W tym przypadku będzie to 100/2, czyli 50. Następnie odejmujemy od niej 41, co daje nam 9. W tym miejscu wykonujemy wszystko analogicznie do poprzednich przykładów. Kiedy wykonamy tradycyjne działania, czeka nas jeszcze jedno. Musimy podzielić lewy „mniejszy” wynik przez 2. Ostateczny wynik to 1681.

$$\begin{array}{lrl} 48 \times 49 & {\scriptstyle -100/2} & \\ & 48 \to -2 & \\ & \underline{49 \to -1} & \\ {\scriptstyle /2} & 47 \mid 2 & \\ & 23,5 \mid 2 = 2352 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} 41 \times 41 & {\scriptstyle -10\cdot 5} & \\ & 41 \to -9 & \\ & \underline{41 \to -9} & \\ {\scriptstyle \cdot 5} & 32 \mid_8 1 & \\ & 160 \mid_8 1 = 1681 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} 41 \times 41 & {\scriptstyle -10\cdot 4} & \\ & 41 \to +1 & \\ & \underline{41 \to +1} & \\ {\scriptstyle \cdot 4} & 42 \mid 1 & \\ & 168 \mid 1 = 1681 & \end{array}$$

Może się również zdarzyć, że dzielenie da wynik ułamkowy. Na przykład, gdy mnożymy 48 i 49. Podstawę możemy dobrać taką samą jak w poprzednim przypadku, czyli 50. Gdy dochodzimy do dzielenia lewej strony, pojawia się problem: 47/2 daje nam 23,5. W takiej sytuacji sprawdzamy, na którą cyfrę przypada ułamek – tu cyfra setek. Dlatego mnożymy ją razy sto, zamieniając 0,5 na 50. Dodajemy je do prawej strony i w ten sposób otrzymujemy wynik: 2352.

2. Drugim sposobem na obliczenie 41×41 jest zmienienie podstawy na $10 \cdot 5$. Tutaj, gdy otrzymamy pierwszy wynik, musimy pomnożyć lewą stronę przez 5, co na końcu da 1681.

3. Ostatnim sposobem jest przyjęcie jako podstawy $10 \cdot 4$. Następnie tworzymy kwadratowy plan i otrzymujemy wstępne wyniki. W tym przypadku ostatnim krokiem będzie zwielokrotnienie lewej strony cztery razy.

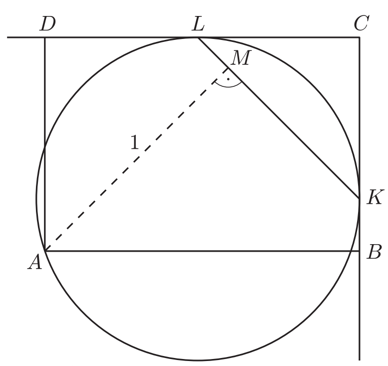
Wydaje się, że wszystkie wątpliwości związane z tą metodą zostały rozwiane. Teraz mnożenie każdych dwóch liczb może zostać sprowadzone do prostych działań. Matematyka wedyjska odkryła wiele zależności między liczbami, które pozwalają skracać obliczenia, sprowadzać je do prostych rachunków na niewielkich liczbach. Ta gałąź królowej nauk jest standardowym przedmiotem w części indyjskich szkół. Jeśli zechcesz się w nią zagłębić i to właśnie jej używać do wykonywania obliczeń, musisz o czymś pamiętać. Nie wolno ulec stereotypowi, że wystarczy poznać wszystkie sutry i sub-sutry, a staniemy się „żywym kalkulatorem". Ta sztuka wymaga tyle samo pracy co inne, pokazuje skróty, ale, aby móc z nich swobodnie korzystać, musimy poświęcić im wiele czasu i trudu. Warto pamiętać, że sutry nie zawsze działają bezwarunkowo. Nie rozwiążemy nimi wszystkich problemów, warto je z pewnością zgłębiać i scalać, tworząc nowe metody.

Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1498. Czy istnieją takie funkcje kwadratowe $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, że równanie $f(g(h(x))) = 0$ jest spełnione przez liczby $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$?
Rozwiązanie na str. 5

M 1499. Czy istnieje wielokrotność liczby 2016^{2016}, której zapis w systemie dziesiętnym zawiera wszystkie dziesięć cyfr?
Rozwiązanie na str. 10



M 1500. Boki BC i CD prostokąta $ABCD$ są styczne odpowiednio w punktach K i L do okręgu przechodzącego przez A. Na odcinku KL leży taki punkt M, że proste KL i AM są prostopadłe. Obliczyć pole prostokąta $ABCD$, wiedząc, że odcinek AM ma długość 1.
Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 907. Skolimowana wiązka protonów ma kształt walca o promieniu R. Protony wiązki poruszają się ze stałą prędkością v równolegle do osi wiązki. Jaka siła działa na proton poruszający się w odległości $r \leq R$? Przyjmujemy, że wewnątrz wiązki liczba protonów na jednostkę objętości jest stała i wynosi ρ.
Rozwiązanie na str. 15

F 908. Wiązka naładowanych cząstek zmienia kierunek, gdy przechodzi przez obszar działania prostopadłego do niej pola elektrycznego lub magnetycznego. Oszacować, jakie musiałoby być natężenie E pola elektrycznego, żeby odchylana wiązka protonów o energii kinetycznej $T = 60$ MeV – taką wiązką dysponuje Cyklotron Instytutu Fizyki Jądrowej w Krakowie – poruszała się wzdłuż łuku okręgu o promieniu $r = 1$ m? Jaka musiałaby być wartość indukcji B pola magnetycznego, żeby wywołać takie samo zakrzywienie toru tej wiązki? Masa protonu wynosi $m \approx 1\ \mathrm{GeV/c^2}$, a prędkość światła $\mathrm{c} \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.
Rozwiązanie na str. 3