# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

$$\sqrt[\otimes]{\mathfrak{f}!} = 44$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 711 ($WT = 2{,}07$) i 712 ($WT = 1{,}37$) z numeru 12/2015

| | | |
|---|---|---|
| Stanisław Bednarek | Łódź | 43,35 |
| Grzegorz Karpowicz | Wrocław | 42,77 |
| Janusz Fiett | Warszawa | 41,04 |
| Marek Gałecki | USA | 37,76 |
| Jędrzej Garnek | Poznań | 37,64 |
| Paweł Kubit | Kraków | 37,54 |
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa | 36,09 |

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2016

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

Przypominamy treść zadań:

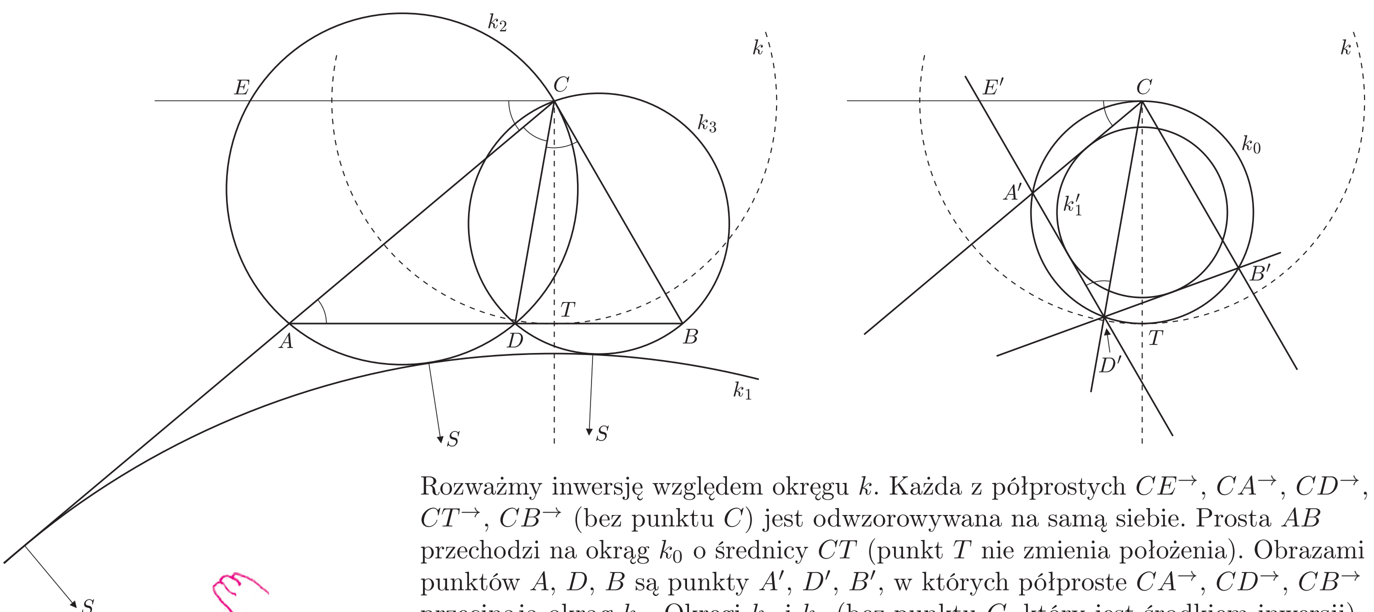
**717.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym $|\sphericalangle BCA| = 2\cdot|\sphericalangle CAB|$. Odcinek $CD$ (o końcu $D \in AB$) jest dwusieczną kąta $BCA$. Punkt $S$ jest środkiem okręgu, stycznego zewnętrznie do okręgów opisanych na trójkątach $ACD$ i $BCD$ oraz stycznego do półprostej $CA^{\rightarrow}$. Udowodnić, że proste $AB$ i $CS$ są prostopadłe.

**718.** Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $a$, $b$, $c$, $d$ zachodzi równość

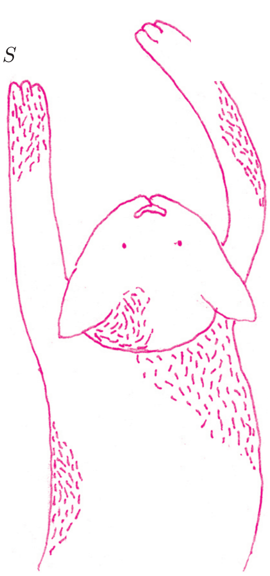
$$[a,b,c,d] = \frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{(a,b,c,d)}\cdot\frac{(a,b,c)\cdot(a,b,d)\cdot(a,c,d)\cdot(b,c,d)}{(a,b)\cdot(a,c)\cdot(a,d)\cdot(b,c)\cdot(b,d)\cdot(c,d)}.$$

Nawias kwadratowy oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, zaś nawias okrągły – największy wspólny dzielnik liczb ujętych w ów nawias.

**717.** Niech $\alpha = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$. Duży okrąg o środku $S$, którego dotyczy zadanie, oznaczmy symbolem $k_1$. Okręgi opisane na trójkątach $ACD$ i $BCD$ oznaczmy przez $k_2$ i $k_3$. Niech $CE$ będzie cięciwą okręgu $k_2$, równoległą do $DA$ (zatem $|\sphericalangle ACE| = \alpha$), i niech $k$ będzie okręgiem o środku $C$, stycznym do prostej $AB$ w punkcie $T$. Skoro $CT \perp AB$, teza zadania sprowadza się do wykazania, że punkt $S$ leży na prostej $CT$.

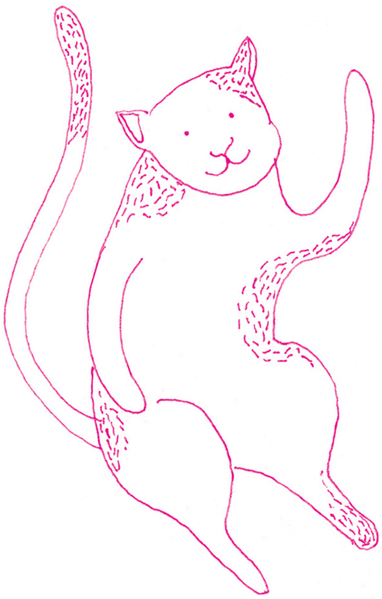



Rozważmy inwersję względem okręgu $k$. Każda z półprostych $CE^{\rightarrow}$, $CA^{\rightarrow}$, $CD^{\rightarrow}$, $CT^{\rightarrow}$, $CB^{\rightarrow}$ (bez punktu $C$) jest odwzorowywana na samą siebie. Prosta $AB$ przechodzi na okrąg $k_0$ o średnicy $CT$ (punkt $T$ nie zmienia położenia). Obrazami punktów $A$, $D$, $B$ są punkty $A'$, $D'$, $B'$, w których półproste $CA^{\rightarrow}$, $CD^{\rightarrow}$, $CB^{\rightarrow}$ przecinają okrąg $k_0$. Okręgi $k_2$ i $k_3$ (bez punktu $C$, który jest środkiem inwersji) zostają przekształcone na proste $A'D'$ oraz $D'B'$. Obrazem okręgu $k_1$ jest okrąg $k_1'$, styczny do prostych $CA'$, $A'D'$ i $D'B'$.



Prosta $CE'$ jest styczna do okręgu $k_0$, więc $|\sphericalangle A'D'C| = |\sphericalangle A'CE'| = |\sphericalangle ACE| = \alpha$. Także $|\sphericalangle A'CD'| = |\sphericalangle ACD| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle D'CB'| = |\sphericalangle DCB| = \alpha$. Zatem cięciwy $CA'$, $A'D'$, $D'B'$ okręgu $k_0$ są jednakowej długości. Okrąg $k_1'$, styczny do tych trzech cięciw, jest wobec tego współśrodkowy z okręgiem $k_0$. Prosta $CT$ jest więc osią symetrii okręgu $k_1'$.

Stąd wynika, że ta sama prosta $CT$ jest też osią symetrii okręgu $k_1$ – przechodzi zatem przez jego środek, czyli punkt $S$ – a to właśnie mieliśmy wykazać.



**718.** Prawa strona podanej równości ma postać ilorazu $K/M$ (licznik $K$ to iloczyn ośmiu czynników, mianownik $M$ to iloczyn siedmiu czynników). Lewa strona to $L = [a, b, c, d]$. Wystarczy pokazać, że dowolna liczba pierwsza wchodzi do rozkładów liczb $K$ oraz $LM$ w jednakowej potędze (być może zerowej).

Ustalmy więc liczbę pierwszą $p$ i przyjmijmy, że liczby $a$, $b$, $c$, $d$, $K$, $L$, $M$ są podzielne odpowiednio przez $p^\alpha$, $p^\beta$, $p^\gamma$, $p^\delta$, $p^\kappa$, $p^\lambda$, $p^\mu$, ale nie przez $p^{\alpha+1}$, $p^{\beta+1}$, $p^{\gamma+1}$, $p^{\delta+1}$, $p^{\kappa+1}$, $p^{\lambda+1}$, $p^{\mu+1}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\kappa &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \\
&\quad + \min\{\alpha,\beta,\gamma\} + \min\{\alpha,\beta,\delta\} + \min\{\alpha,\gamma,\delta\} + \min\{\beta,\gamma,\delta\},\\
\mu &= \min\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} + \\
&\quad + \min\{\alpha,\beta\} + \min\{\alpha,\gamma\} + \min\{\alpha,\delta\} + \min\{\beta,\gamma\} + \min\{\beta,\delta\} + \min\{\gamma,\delta\},\\
\lambda &= \max\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}.
\end{aligned}$$

Należy wykazać, że $\kappa = \lambda + \mu$.

Wobec symetrii rozważanych wyrażeń (względem permutacji $a, b, c, d$) nie tracimy ogólności zakładając, że $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta$. Napisane równości uzyskują postać

$$\begin{aligned}
\kappa &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \gamma + \delta + \delta + \delta,\\
\mu &= \delta + \beta + \gamma + \delta + \gamma + \delta + \delta,\\
\lambda &= \alpha;
\end{aligned}$$

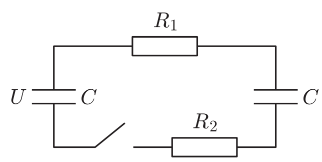
teza $(\kappa = \lambda + \mu)$ gotowa.

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2016

*Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA*

Przypominamy treść zadań:

**614.** Znaleźć ilość ciepła, jaka wydzieli się na każdym z oporników po zamknięciu klucza. Jeden z kondensatorów naładowany był początkowo do napięcia $U$, drugi nie był naładowany. Pojemności kondensatorów są jednakowe i równe $c$, wartości oporów wynoszą $R_1$ i $R_2$.




**615.** Stosunek liczby zwojów w uzwojeniu wtórnym transformatora do liczby zwojów w uzwojeniu pierwotnym wynosi $n = 2$. Gdy do uzwojenia pierwotnego przyłożono napięcie przemienne o amplitudzie $U_1 = 100V$, amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym wynosiła $U_2 = 197V$. Jaka będzie amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym, gdy rdzeń transformatora zastąpimy rdzeniem o tych samych wymiarach, ale wykonanym z materiału o przenikalności magnetycznej $k = 10$razy mniejszej niż w pierwszym przypadku? Rozpraszanie strumienia magnetycznego oraz straty w rdzeniu możemy zaniedbać.

**614.** Przed zamknięciem klucza energia naładowanego kondensatora wynosi $W_1 = cU^2/2$ , a jego ładunek jest równy $q = cU$. Po zamknięciu klucza napięcie na równolegle połączonych kondensatorach ma wartość $U_2 = q/(2c) = U/2$. Energia układu kondensatorów wynosi $W_2 = cU^2/4$ i jest mniejsza od początkowej o wielkość $|\Delta W| = cU^2/4$ , równą całkowitemu wydzielonemu ciepłu $Q$. Natężenie prądu płynącego przez oba oporniki podczas przeładowywania kondensatorów jest w każdej chwili jednakowe, zatem ciepło wydzielone na oporze $R_1$ dane jest wzorem $Q_1 = R_1 Q/(R_1 + R_2)$. Ostatecznie $Q_i = \dfrac{R_i cU^2}{4(R_1 + R_2)}$, gdzie $i = 1, 2$.

**615.** Oznaczmy współczynnik samoindukcji uzwojenia pierwotnego w pierwszym przypadku przez $L$, w drugim przez $L'$. Współczynnik samoindukcji cewki jest proporcjonalny do przenikalności magnetycznej rdzenia, stąd $L' = L/k$. Uzwojenie możemy traktować jako połączenie szeregowe oporu czynnego $R$ oraz indukcyjnego $L\omega$, gdzie $\omega$ jest częstością napięcia zasilającego. Amplituda napięcia na oporze indukcyjnym wynosi $U_L = L\omega U_1/\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}$ . Ponieważ zakładamy, że strumienie pola magnetycznego przez uzwojenia pierwotne i wtórne są jednakowe, zachodzi związek $U_2 = nU_L$, stąd $(R/L\omega)^2 = (nU_1/U_2)^2 - 1$. Po zamianie rdzenia amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym dana jest wzorem

$U_2' = \dfrac{nU_1}{\sqrt{1 + (\frac{kR}{L\omega})^2}} \approx 100$ V. Widać stąd, że dla normalnej pracy transformatora konieczne jest, aby opór czynny uzwojenia pierwotnego był niewielki w porównaniu z oporem indukcyjnym.