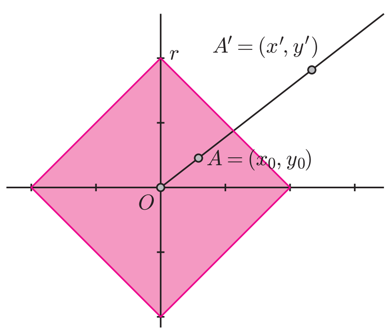
Inwersja w różnych metrykach

Jan ŁĘSKI, Jakub SIEROŃ***

*uczeń VIII LO i Pałacu Młodzieży w Katowicach
**student Matematyki, Wydział MIM UW

Wiele przedmiotów zawdzięcza swe istnienie kompozycji dwóch pozornie niewspółistniejących ze sobą idei. Louis Braille połączył koncepcję zapisu graficznego, czyli odczytywanego za pomocą wzroku, ze sposobem zapisywania wiadomości zaprojektowanym dla ludzi niewidomych, którzy korzystają ze zmysłu dotyku. W rezultacie powstał alfabet dla niewidomych, który można odczytać także za pomocą wzroku. Podobnie narodził się pomysł na zbadanie obrazów inwersyjnych w różnych metrykach. To również było zespolenie dwóch odległych od siebie tematów. Dzięki połączeniu inwersji i metryki uzyskaliśmy nowe ciekawe obiekty matematyczne. Zapraszamy na krótką podróż w kwadratowych okularach do świata inwersji.

Zacznijmy od początku: inwersja to przekształcenie geometryczne, „wywinięcie” wnętrza koła na zewnątrz i „zawinięcie” zewnętrza tego koła do środka. Oczywiście nie chodzi tu o wywinięcie byle jakie, punkt X oraz jego obraz inwersyjny X' zawsze znajdują się na tej samej półprostej o początku w środku okręgu inwersyjnego (O) oraz zachodzi następująca równość $|OX| \cdot |OX'| = r^2$, gdzie r oznacza promień okręgu. Tym sposobem każdy punkt z zewnątrz okręgu znajduje swój inwersyjny odpowiednik w jego wnętrzu i prawie odwrotnie. Prawie – ponieważ istnieje jeszcze niezręczny środek okręgu. Umówmy się, że go wywijamy do jednego punktu w nieskończoności. Według powyższych zasad można tworzyć obrazy inwersyjne nie tylko punktów, ale prostych i wszelkich innych figur geometrycznych.



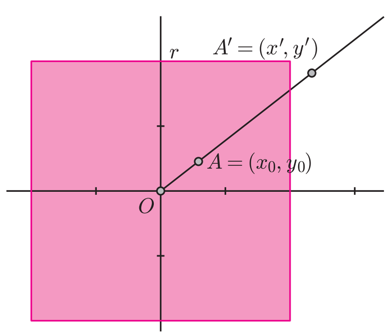
Rys. 1. Okrąg w metryce miejskiej

Tak się składa, że obrazem inwersyjnym okręgu i prostej (niezależnie od ich położenia względem okręgu inwersyjnego) zawsze jest okrąg lub prosta (w niektórych konfiguracjach obrazem okręgu jest prosta i odwrotnie). Dowód tego faktu jest dość prosty, można go znaleźć m.in. w książce *Co to jest matematyka?* R. Couranta i H. Robbinsa. Stwierdzenie „zawsze jest okrąg lub prosta” padło trochę na wyrost, mimo wskazania miejsca, gdzie można znaleźć tego dowód. Otóż owo stwierdzenie jest prawdziwe wtedy, gdy przez odległość między dwoma punktami rozumiemy miarę „zwykłego” łączącego je odcinka (czyli tak, jak nam przykazano w szkole, co nazywamy *metryką euklidesową*). Odległość, czyli najkrótsza droga, wcale nie musi mieć związku z tym prostym odcinkiem. Jak w takich nieszkolnych odległościach wygląda wywijanie obrazów? Sprawdźmy.

Niech pierwszym nieszkolnym sposobem mierzenia odległości będzie *metryka miejska*. Odległość między punktami A i B o współrzędnych odpowiednio (x_a, y_a) i (x_b, y_b) opisuje wzór: $d(A,B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|$. Odpowiada to poniekąd sposobowi mierzenia odległości w wielkim mieście, gdzie dwie ulice są albo prostopadłe, albo równoległe, a odległość między dwoma punktami, czyli najkrótsza droga między nimi to suma długości tras w obu kierunkach. Okrąg niezmiennie jest zbiorem punktów równo odległych od pewnego ustalonego punktu płaszczyzny (środka). Przy tak zadanej odległości wygląda on tak jak na rysunku 1. Przyjmujemy tu dla wygody, że środek znajduje się w punkcie $(0,0)$.

Jeśli mamy prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, a punkty A i B będą przeciwległymi wierzchołkami tego prostokąta, to odległość w metryce maksimum między punktami A i B to nic innego jak dłuższy bok tego prostokąta.

Drugą metryką, w jakiej będziemy poddawać obiekty inwersji, jest *metryka maksimum*. Odległość dana jest wzorem: $d(A,B) = \max\{|x_b - x_a|, |y_b - y_a|\}$. Okrąg o środku $(0,0)$ w metryce maksimum przedstawiony jest na rysunku 2.



Rys. 2. Okrąg w metryce maximum

Przejdźmy teraz do meritum naszych rozważań. Jak będą wyglądały obrazy prostych i okręgów poddane inwersji w metrykach miejskiej i maksimum? Czas na przystanek nad wzorami. Załóżmy dla uproszczenia, że środek okręgu inwersyjnego znajduje się w punkcie $(0,0)$. Inwersji poddajemy punkt o współrzędnych (x_0, y_0). Chcemy znaleźć opis współrzędnych obrazu inwersyjnego tego punktu (x', y').

Równanie prostej przechodzącej przez środek okręgu inwersyjnego to

$$y = \frac{|x_0|}{|y_0|} \cdot x \;\Rightarrow\; y' = \frac{|x_0|}{|y_0|} \cdot x'.$$

Równanie okręgu w metryce miejskiej jest następujące.

$$|x| + |y| = r.$$

Warunek inwersji daje

$$(|x_0| + |y_0|) \cdot (|x'| + |y'|) = r^2 \Rightarrow (|x_0| + |y_0|) \cdot \left(|x'| + \frac{|x_0|}{|y_0|} \cdot |x'|\right) = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|x_0| + |y_0|) \cdot |x'| \cdot \frac{|x_0| + |y_0|}{|x_0|} = r^2 \Rightarrow$$

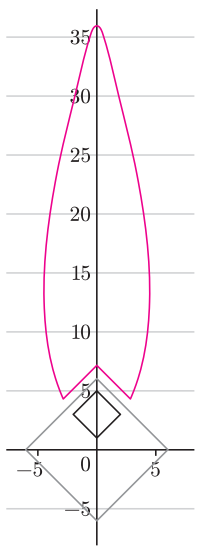
$$\Rightarrow |x'| = \frac{r^2}{(|x_0| + |y_0|)^2} \cdot |x_0|.$$

Analogicznie do powyższego rozumowania otrzymujemy współrzędną y'.

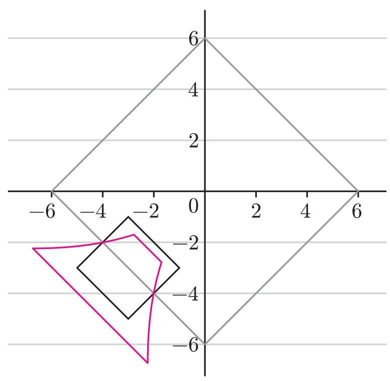
Zatem ostatecznie punkt będący obrazem inwersyjnym punktu to

$$|x'| = \frac{r^2}{(|x_0| + |y_0|)^2} \cdot |x_0|, \qquad |y'| = \frac{r^2}{(|x_0| + |y_0|)^2} \cdot |y_0|.$$

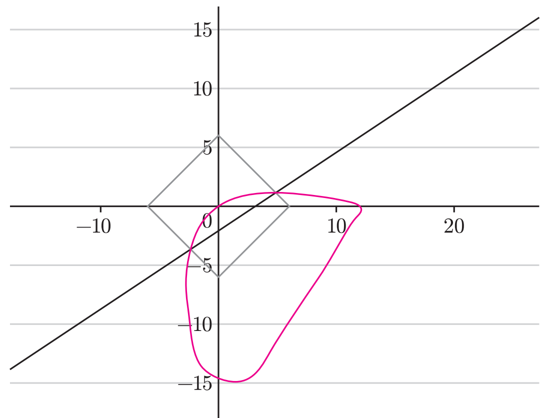
Teraz metoda działania jest prosta: program komputerowy generuje 100 punktów należących do kształtu, który chcemy wywinąć (okręgów i prostych), a następnie korzystając ze wzorów, oblicza obrazy tych punktów. Te dane wprowadzamy do arkusza kalkulacyjnego, tworzącego wykresy krzywych, które dobrze przybliżą szukane obrazy. Poniżej możemy zobaczyć najciekawsze z uzyskanych kształtów.



Rys. 3

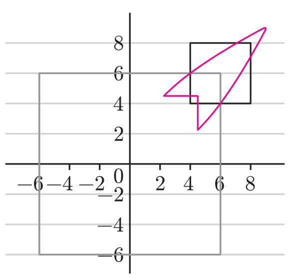


Rys. 4

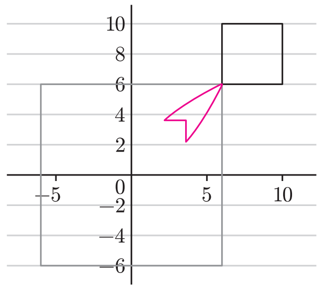


Rys. 5

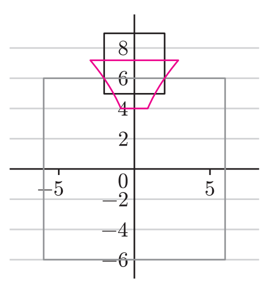
Na powyższych rysunkach przedstawione są inwersje w metryce miejskiej (kolor szary – okrąg inwersyjny; czarny – kształt poddawany inwersji; kolor – obraz inwersyjny).



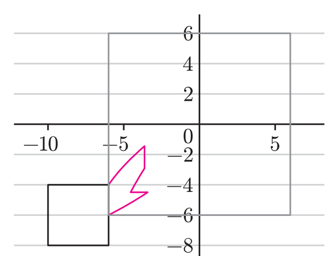
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Na powyższych rysunkach przedstawione są inwersje w metryce maksimum. Do utworzenia obrazów w tej metryce nie podaliśmy stosownych wzorów, ale poradzisz sobie z nimi, drogi Czytelniku, przy niewielkim nakładzie chęci i czasu.

Czyż podobieństwo między rysunkami 4 i 8 nie jest zastanawiające? Podobnie obrazy na rysunkach 3, 6 i 7. A przecież to inne metryki. Może dlatego matematycy zajmujący się analizą funkcjonalną uważają, że te metryki są tym samym.

Po obejrzeniu rysunków od razu nasuwa się wniosek, że obrazem okręgu lub prostej nie musi być (w odróżnieniu od metryki euklidesowej) okrąg lub prosta. Czy tak, czy widać? Drogi Czytelniku, jeżeli beztrosko uwierzyłeś w to stwierdzenie, odpowiedz na pytanie (wcale niebanalne), jak wyglądają proste w powyższych metrykach?

Temat nie został wyczerpany, a jedynie nakreślony. Liczba kombinacji, w jakich możemy „skrzyżować” różne kształty poddane inwersji oraz metryki, jest nieprzebrana, przedstawione próby pokazują jedynie kierunki możliwych poszukiwań, do których serdecznie zachęcamy.

O obrazach inwersyjnych pisaliśmy m.in. w *Delcie* 5/2013, *deltoid* 53.