Trzy karty
o paradoksie Monty'ego Halla nieco inaczej

Na stole leżą, ułożone w losowej kolejności koszulkami do góry, trzy karty: As, Król i Dama. Jeżeli gracz odgadnie prawidłowo położenie Asa, wygrywa dużą nagrodę. Gracz wskazał kartę, nie obejrzał jej, i wtedy prowadzący grę mówi: *Chwileczkę. Odkryję jedną z dwóch pozostałych kart, a ty się zastanów, czy chcesz zmienić swoją kartę na kartę, która pozostała nieodkryta.* Prowadzący grę zna położenie kart i zawsze odkrywa kartę różną od Asa. Jeżeli ma do wyboru Króla albo Damę, pokazuje Króla z prawdopodobieństwem p, a Damę z prawdopodobieństwem $1-p$, gdzie $0 \leqslant p \leqslant 1$ (np. można wyobrazić sobie sytuację, gdy prowadzący grę bardzo lubi Króla – wtedy $p = 1$). Następnie odkrywa kartę i jest nią Król.

Oblicz prawdopodobieństwo sukcesu gracza, który zmieni swój pierwotny wybór.

Często spotykamy takie rozumowania:

1) Zostały dwie karty, As i Dama. Jedną z nich ma prowadzący grę, a drugą gracz. Jest więc wszystko jedno, czy gracz zmieni swój wybór czy nie, prawdopodobieństwo wygranej jest równe $1/2$.
2) Prawdopodobieństwo tego, że gracz pierwotnie wskazał Asa, jest równe $1/3$ i pokazanie Króla nic nie zmienia. Stąd wynika, że prawdopodobieństwo sukcesu gracza, który zmieni swój wybór, jest równe $2/3$.

Są to dwa różne rozumowania, które znacznie upraszczają problem. Oba pomijają informację o odkrytej karcie, ignorują preferencje prowadzącego grę i prowadzą do dwóch różnych wyników.

Aby rozwiązać ten problem, zbudujemy model probabilistyczny dla tego doświadczenia.

Mamy cztery możliwości, które przedstawiamy w tabeli.

Oznaczmy przez A zdarzenie losowe polegające na tym, że gracz nie wskazał Asa i osiągnie sukces po zmianie swojego pierwotnego wyboru, i przez K zdarzenie losowe polegające na tym, że prowadzący grę odkryje Króla.

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, czyli

$$P(A|K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)}.$$

Z pierwszego wiersza tabeli mamy $P(A \cap K) = 1/3$. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że prowadzący odkryje Króla, jest równe $P(K) = \frac{1}{3} + \frac{p}{3} = \frac{1+p}{3}$, czyli sumie prawdopodobieństw z pierwszego i trzeciego wiersza. Stąd $P(A|K) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{p}{3}} = \frac{1}{1+p}$; zatem $\frac{1}{2} \leqslant P(A|K) \leqslant 1$.

Prawdopodobieństwo wygranej gracza przy zamianie kart jest nie mniejsze od $1/2$.
Gdy $p = 1$ (prowadzący bardzo lubi Króla), to $P(A|K) = 1/2$; gdy $p = 0$ (prowadzący bardzo lubi Damę i odkrył Króla, czyli gracz ma Damę), to $P(A|K) = 1$.
Gdy $p = 1/2$, mamy $P(A|K) = 2/3$; przypadek ten oznacza, że prowadzący grę – w sytuacji, gdy ma do wyboru Króla albo Damę – wybiera kartę losowo.

	karta wskazana przez gracza	karty, które pozostały dla prowadzącego grę	karty odkryte przez prowadzącego grę	prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń opisanych w trzeciej i czwartej kolumnie
1	D	A, K	K	$(1/3) \cdot 1$
2	K	A, D	D	$(1/3) \cdot 1$
3_1	A	K, D	K	$(1/3) \cdot p = p/3$
3_2	A	K, D	D	$(1/3) \cdot (1-p) = (1-p)/3$

Edward STACHOWSKI

Zadania

Przygotował Michał NAWROCKI

F 905. Ile wynosi energia kinetyczna E_k elektronu poruszającego się po okręgu o promieniu $r = 4 \cdot 10^{-2}$ m w polu magnetycznym o indukcji $B = 5 \cdot 10^{-2}$ T? Masa spoczynkowa elektronu to $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.
Rozwiązanie na str. 3

F 906. Jaką pracę A przeciw siłom napięcia powierzchniowego należy wykonać, aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu $R = 5$ cm? Współczynnik napięcia powierzchniowego σ dla wody z mydłem wynosi około $40 \cdot 10^{-3}$ N/m.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Urszula PASTWA

M 1495. Mając dane parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tworzymy tabelę $n \times n$, wpisując w i-tym wierszu i j-tej kolumnie liczbę $a_i + b_j$. Wykazać, że jeśli iloczyn liczb wpisanych w każdą kolumnę jest jednakowy, to również iloczyn liczb wpisanych w każdy wiersz jest jednakowy.
Rozwiązanie na str. 15

M 1496. Każda z liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$ jest mniejsza od 2016, a najmniejsza wspólna wielokrotność dowolnych dwóch z tych liczb jest większa od 2016. Wykazać, że

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{n}{2016}.$$

Rozwiązanie na str. 8

M 1497. W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 96°. Wewnątrz trójkąta leży taki punkt D, że $\sphericalangle DAB = 18^\circ$ i $\sphericalangle DBA = 30^\circ$. Wyznaczyć miarę kąta ACD.
Rozwiązanie na str. 5