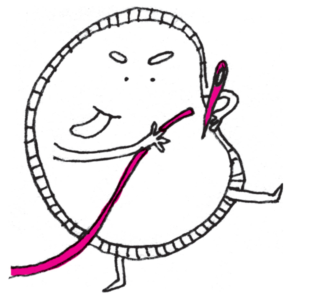
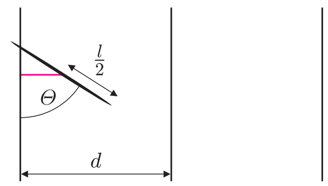
# Kluska w uchu wielbłąda albo arytmetyka moralna

*Krzysztof REJMER*

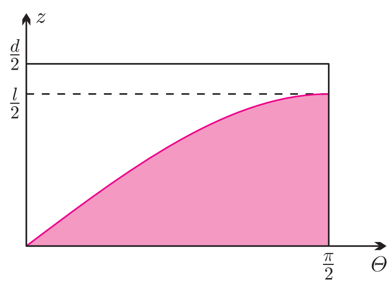


Powiada Ewangelia: *Łatwiej jest wielbłądowi przejść przez ucho igielne, niż bogatemu wejść do królestwa niebieskiego.* Lingwiści, i nie tylko oni, próbują znaleźć jakieś sensowne wyjaśnienie tych słów. Na przykład Cyryl Aleksandryjski twierdził, że jest to językowe nieporozumienie, a Jezus miał w rzeczywistości na myśli nie wielbłąda, lecz linę. Oba te wyrazy mogły być pomylone z powodu zachodzącego w języku greckim procesu nazwanego itacyzmem. Polegał on na zamianie litery $\eta$ na literę $\iota$ ($\kappa\acute{\alpha}\mu\eta\lambda o\varsigma$ to wielbłąd, natomiast $\kappa\acute{\alpha}\mu\iota\lambda o\varsigma$ to lina). Jest to tym bardziej prawdopodobne, że aramejskie słowo *gamla* oznaczało zarówno samego wielbłąda, jak i wykonaną z jego sierści linę. Jak to często bywa, winny jest niedouczony interpretator.

Z podobną grą słów mamy do czynienia w pewnym ciekawym zagadnieniu dotyczącym rachunku prawdopodobieństwa. Aby je omówić, zaczniemy od rzeczy powszechnie znanej, czyli od igły Buffona, opisanej przezeń w 1777 roku w *Szkicu o arytmetyce moralnej.* Rzucamy igłą o długości $l$ na płaszczyznę podzieloną równoległymi liniami, przy czym odległość $d$ między sąsiednimi liniami spełnia warunek $d \geqslant l$. Niech $z$ oznacza odległość igły od najbliższej linii, natomiast $\Theta$ mniejszy z kątów, jaki igła tworzy z tą linią. Możliwe wartości $z$ i $\Theta$ leżą w przedziałach, odpowiednio, $\left[0, \frac{d}{2}\right]$ i $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Przyjmujemy, że $z$ i $\Theta$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych. Długość rzutu igły na kierunek prostopadły do linii jest równa $l \sin \Theta$. Jeżeli środek igły jest odległy od najbliższej linii o mniej niż $\frac{1}{2} l \sin \Theta$ (rys. 1), to igła przecina linię. Prawdopodobieństwo przecięcia linii jest więc równe stosunkowi pola $S$ pod sinusoidą $\frac{1}{2} l \sin \Theta$ i pola prostokąta o bokach $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{d}{2}$ (rys. 2).



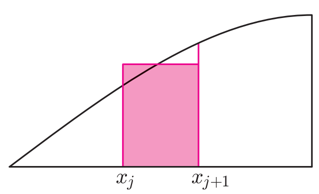

Rys. 1




Rys. 2

Pole $S$ możemy obliczyć, dzieląc odcinek $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ na $N$ małych odcinków. Niech $x_j = \frac{j\pi}{2N}$, $j = 0, \ldots, N$, będą końcami kolejnych odcinków. Wtedy $S$ przybliżamy jako

$$
\begin{aligned}
S &\approx \sum_{j=0}^{N-1} \frac{l}{2} \sin\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right) \cdot (x_{j+1}-x_j) = \\
&= \frac{l}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right) \sin\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right) \cdot \frac{x_{j+1}-x_j}{\sin\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)} = \\
&= \frac{l}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (\cos x_j - \cos x_{j+1}) \cdot \frac{\frac{x_{j+1}-x_j}{2}}{\sin\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)} = \\
&= \frac{l}{2} \frac{\frac{\pi}{4N}}{\sin \frac{\pi}{4N}} \sum_{j=0}^{N-1} (\cos x_j - \cos x_{j+1}) \xrightarrow{N \to \infty} \frac{l}{2}
\end{aligned}
$$



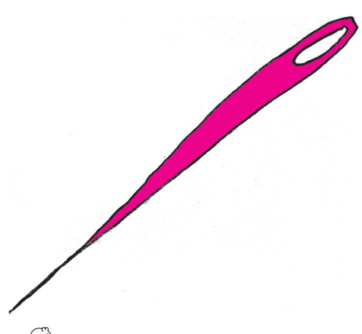

Rys. 3

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $P = \frac{2l}{\pi d}$, a w szczególności dla $l = d$ otrzymujemy $P = \frac{2}{\pi}$. Wynik ten pozwala „zmierzyć" wartość liczby $\pi$. Nie trzeba rzucać prawdziwą igłą, wystarczy „doświadczenie komputerowe". Jeśli posłużymy się definicją prawdopodobieństwa podaną przez Laplace'a, to dla $l = d$ mamy

$$\pi \simeq 2\frac{N}{x},$$

gdzie $N$ to liczba rzutów, a $x$ to liczba przecięć. Ponieważ przyjęliśmy (arbitralnie?) jednostajność obu rozkładów, można też twierdzić, że w rzeczywistości nie tyle wyznaczamy wartość $\pi$, ile testujemy to założenie.

Wszystkim, których zdumiewa obecność liczby $\pi$ w zadaniu dotyczącym rachunku prawdopodobieństwa, Hugo Steinhaus wyjaśniał w charakterystycznym dla siebie stylu, że jest to ilustracja powiedzenia *fortuna kołem się toczy.* Jednak w rzeczywistości to nie powinno dziwić. Liczba $\pi$ jest zdefiniowana jako stosunek długości okręgu do jego średnicy. Zauważmy, że wszystkie możliwe położenia



**Rozwiązanie zadania M 1495.**
Rozważmy wielomian

$$
\begin{aligned}
w(x) = {} & (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) - \\
& - (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n).
\end{aligned}
$$

Wartość $w(b_j)$ jest równa iloczynowi $c$ liczb wpisanych w $j$-tą kolumnę. Stąd $w(b_1) = \ldots = w(b_n) = c$. Ponieważ stopień wielomianu $w$ jest mniejszy niż $n$, otrzymujemy, że jest to wielomian stale równy $c$.

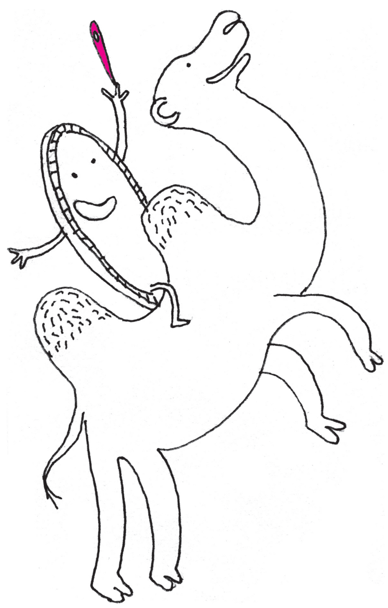
W takim razie mamy

$$
\begin{aligned}
c &= w(-a_i) = \\
&= (-1)^{n+1}(a_i+b_1)\ldots(a_i+b_n),
\end{aligned}
$$

a stąd iloczyn liczb wpisanych w $i$-ty wiersz jest równy $(-1)^{n+1} \cdot c$ niezależnie od $i$.

jednego końca igły względem drugiego tworzą okrąg, którego promień jest długością tej igły. A zatem jesteśmy w domu.

A teraz zrobimy z liny ewangelicznego wielbłąda. A raczej z igły Buffona uczynimy matematyczną linę albo kluskę. Podamy rozwiązanie podobnego zagadnienia, którego autorem jest Joseph-Émile Barbier. Ta wersja problemu igły Buffona (ang. *Buffon's needle*) nosi żartobliwą nazwę *kluski Buffona* (ang. *Buffon's noodle*).



W przypadku $l \leqslant d$, który tu rozważamy, możliwe jest co najwyżej jedno przecięcie igły z linią. Wprowadzimy nową zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy igła przecina linię, i 0, gdy igła nie przecina linii. Obliczmy wartość średnią tej zmiennej. Jest ona równa

$$\mu_1 = 1 \cdot P + 0 \cdot (1 - P) = P.$$

Widzimy, że jest to prawdopodobieństwo przecięcia linii przez igłę. Wyrażenie po prawej stronie powyższego równania jest zarazem średnią liczbą przecięć, $\mu_1$. Zastąpimy teraz igłę przez łamaną złożoną z $n$ odcinków. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami przecięć linii przez te odcinki, natomiast $x$ ich sumą, czyli liczbą przecięć linii przez łamaną. Wielkości $x_i$ nie są niezależnymi zmiennymi losowymi, ale to bez znaczenia, bo średnia liczba przecięć linii przez łamaną i tak jest sumą średnich liczb przecięć linii przez odcinki

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle.$$

Przejdziemy teraz z łamaną do granicznej krzywej gładkiej (czyli naszej kluski) o ustalonej długości, zwiększając do nieskończoności liczbę odcinków łamanej. Średnia liczba przecięć kluski jest proporcjonalna do jej długości $l$ i wynosi tyle samo co dla igły Buffona:

$$\mu_1(l) = \frac{2l}{\pi d}.$$

Swoją drogą, Barbier udowodnił w rzeczywistości coś więcej, bo nazwane jego imieniem twierdzenie, które mówi, że dla dowolnej zamkniętej krzywej o stałej szerokości stosunek jej długości do jej średnicy zawsze jest taki sam i równy $\pi$, niezależnie od kształtu tej krzywej.

**Uzasadnienie wzoru Barbiera.** Dla łamanej złożonej z dwóch odcinków o długościach $a$ i $b$ średnia liczba przecięć jest równa

$$\mu_1(a+b) = \mu_1(a) + \mu_1(b),$$

gdzie $\mu_1(l)$ jest średnią liczbą przecięć w funkcji długości (odpowiednio łamanej lub odcinka). Wynika stąd, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$

$$\mu_1(na) = n\mu_1(a),$$

oraz dla dowolnych liczb naturalnych $n$ i $m$

$$n\mu_1(a) = \mu_1(na) = \mu_1\left(m\frac{n}{m}a\right) = m\mu_1\left(\frac{n}{m}a\right).$$

W przypadku odcinka łamanej $\mu_1$ jest funkcją ciągłą jego długości $a$. A zatem dla dowolnej liczby wymiernej, a przez to i dla dowolnej liczby rzeczywistej

$$\mu_1(ra) = r\mu_1(a),$$

a stąd

$$\mu_1(a) = ca, \quad \text{gdzie } c = \mu_1(1).$$

Wyznaczymy teraz wartość $c$. Posłużymy się kluską zwiniętą w okrąg o średnicy $d$. W tej sytuacji zawsze istnieją dwa przecięcia. Mamy więc

$$2 = \mu_1(d\pi) = cd\pi,$$

a stąd

$$c = \frac{2}{\pi d},$$

co zgadza się z rachunkiem dla igły Buffona.

Więcej o twierdzeniu Barbiera można przeczytać np. w książce Jarosława Górnickiego *Okruchy matematyki.*

Rozwiązanie zagadnienia Buffona wielokrotnie testowano eksperymentalnie. Wspomnimy tu o jednym tylko wyniku, uzyskanym w 1901 roku przez włoskiego matematyka Mario Lazzariniego, który rzucał 3408 razy igłą o stosunku długości do szerokości paska równym 5/6. W tym przypadku $\pi \approx \frac{5}{3}\frac{N}{x}$. Lazzarini uzyskał robiący wrażenie rezultat o błędzie mniejszym od $3 \cdot 10^{-7}$; było to przybliżenie $\pi \approx \frac{355}{113}$. Podejrzenie wzbudził jednak fakt, że powyższe przybliżenie znane jest od dawna jako najlepsze wymierne przybliżenie $\pi$, jeśli ograniczyć się do liczb co najwyżej pięciocyfrowych. Jeśli spełniony jest warunek $x = \frac{113}{213}N$, to otrzymamy właśnie owo wspomniane najlepsze przybliżenie. Łatwo tego dokonać. Wystarczy wybrać liczbę $n$ będącą wielokrotnością liczby 213, a wtedy $x$ jest liczbą całkowitą. Liczba $3408 = 16 \cdot 213$ jest taką wielokrotnością. Dziś uważa się wynik Lazzariniego za oszustwo (co jest przecież rzeczą niemoralną) albo raczej za wyrafinowany żart (a to już zupełnie inna sprawa).

W tytule oryginalnej pracy Buffona występuje nazwa *arytmetyka moralna.* Pojęcie to wywodzi się z chętnie praktykowanej przez Anglosasów (a zwalczanej przez myślicieli chrześcijańskich) filozofii utylitaryzmu (Bentham), która uczy, że o moralnej wartości czynu świadczą jedynie jego skutki. Stąd, podejmując decyzje moralne, jesteśmy zmuszeni dokonywać swoistego rachunku użyteczności, czyli arytmetyki albo buchalterii moralnej, i szacować miarę pozytywnych oraz negatywnych skutków naszych czynów. Propozycja rozstrzygania konfliktu wartości i określenia moralnego obowiązku w oparciu o ową buchalterię moralną opiera się na (naiwnym z dzisiejszego punktu widzenia) założeniu, że możliwe jest odkrycie jakiejś wspólnej miary dla wszystkich ludzkich wartości i że taki uniwersalny zbiór niewykluczających się wzajemnie wartości istnieje.

Ewangelista, być może, powiedziałby, że miarą jest ucho igielne…