Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

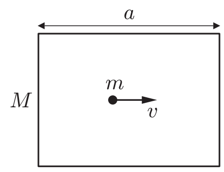
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2016

Zadania z fizyki nr 620, 621

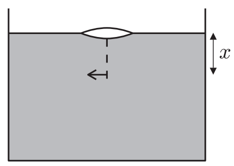
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

620. W chwili początkowej prostokątna ramka o masie M spoczywa na powierzchni poziomej, a mała kulka o masie m porusza się z prędkością v wewnątrz ramki, równolegle do boku o długości a (rys. 1). Kulka zderza się sprężyście ze środkami krótszych boków ramki. Znaleźć czas pomiędzy kolejnymi zderzeniami z tym samym bokiem ramki. Nie ma tarcia.



Rys. 1

621. Dwuwypukła soczewka o promieniach krzywizny R, wykonana ze szkła o współczynniku załamania n_s, zanurzona jest jedną stroną w wodzie (rys. 2). Mały przedmiot znajduje się w wodzie na osi optycznej soczewki, w odległości x od soczewki. Wysokość przedmiotu wynosi h. W soczewce powstaje obraz pozorny. Jakie jest jego powiększenie liniowe? Współczynnik załamania wody jest równy n_w.



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 606 ($WT = 2{,}2$), 607 ($WT = 2{,}5$), 608 ($WT = 1{,}4$) i 609 ($WT = 3$) z numerów 11–12/2015

Tomasz Wietecha	Tarnów	47,50
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Michał Koźlik	Gliwice	33,88
Marian Łupieżowiec	Gliwice	33,32
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22
Jan Zambrzycki	Białystok	17,14

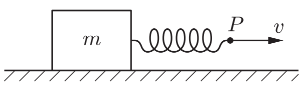
Rozwiązania zadań z numeru 2/2016

Przypominamy treść zadań:

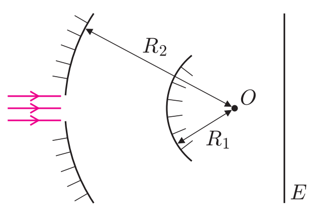
612. Na poziomej powierzchni spoczywa klocek o masie m, do którego doczepiono nieważką sprężynę o współczynniku sprężystości k. W pewnej chwili wolny koniec sprężyny zaczęto ciągnąć tak, że poruszał się on ze stałą poziomą prędkością v. Jaką drogę przebędzie klocek do momentu, w którym osiągnie on prędkość v? Współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego między klockiem a podłożem wynoszą odpowiednio μ_s i μ_k, przy czym $\mu_s > \mu_k$.

613. Za pomocą układu koncentrycznych zwierciadeł otrzymano na ekranie ostry obraz Słońca. Promienie krzywizny zwierciadeł wynoszą $R_1 = 12$ cm i $R_2 = 30$ cm. Jaka jest ogniskowa cienkiej soczewki, za pomocą której można otrzymać obraz Słońca o takiej samej wielkości?

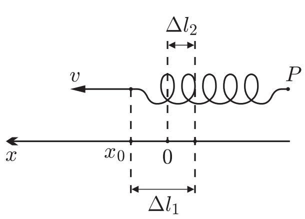
612. Klocek ruszy z miejsca, gdy rozciągnięcie sprężyny osiągnie wartość $\Delta l_1 = \mu_s mg/k$ i przyjmijmy tę chwilę za początkową. W układzie odniesienia związanym ze swobodnym końcem P sprężyny klocek zacznie oddalać się ruchem harmonicznym od położenia równowagi ($x = 0$ na rys. 5), gdzie wydłużenie sprężyny wynosi $\Delta l_2 = \mu_k mg/k$. W chwili początkowej prędkość klocka wynosi v, a jego odległość od położenia równowagi jest równa $x_0 = \Delta l_1 - \Delta l_2 = (\mu_s - \mu_k)mg/k$. Z zasady zachowania energii maksymalna odległość klocka od położenia równowagi wynosi $A = \sqrt{mv^2/k + m^2g^2(\mu_s - \mu_k)^2/k^2}$. W tym położeniu prędkość klocka względem podłoża osiągnie wartość v. Ruch klocka do chwili, gdy oddali się na maksymalną odległość A, opisuje wzór $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$. Z warunku początkowego $x(0) = x_0$ otrzymujemy przesunięcie fazowe $\sin\varphi = x_0/A$. Czas t_A, po którym odległość od położenia równowagi osiągnie wartość A, dostajemy ze wzoru $\omega t_A + \varphi = \pi/2$. Odległość klocka od położenia początkowego w układzie związanym z końcem sprężyny równa jest $A - x_0$. Szukana droga przebyta przez klocek w układzie związanym z podłożem wynosi $s = vt_A - (A - x_0)$.



Rys. 3



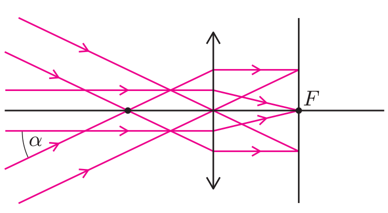
Rys. 4



Rys. 5

613. Z każdego punktu Słońca na soczewkę albo zwierciadło pada wiązka promieni równoległych. Wiązki wychodzące z różnych punktów nie są równoległe do siebie (rys. 6). Obraz Słońca powstaje w płaszczyźnie ogniskowej soczewki albo zwierciadła, a jego promień wynosi $f\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx f\alpha$, gdzie α jest promieniem kątowym Słońca widzianego z Ziemi, a f ogniskową soczewki albo zwierciadła. Obraz pozorny Słońca w zwierciadle wypukłym o ogniskowej $f_1 = -R_1/2$ ma promień $h = |f_1|\alpha$, jest przedmiotem dla zwierciadła wklęsłego o ogniskowej $f_2 = R_2/2$ i znajduje się w odległości od niego równej $x_2 = R_2 - R_1/2$. Obraz, który powstaje w zwierciadle wklęsłym, oddalony jest od niego o $y_2 = \dfrac{R_2(2R_2 - R_1)}{2(R_2 - R_1)}$. Powiększenie tego obrazu wynosi $\dfrac{H}{h} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{R_2}{R_2 - R_1}$, zatem jego promień to $H = \dfrac{R_2}{R_2 - R_1}|f_1|\alpha$. Szukana ogniskowa soczewki wynosi

$$f = \frac{H}{\alpha} = \frac{R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}.$$



Rys. 6

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 709 ($WT = 1{,}06$) i 710 ($WT = 3{,}44$) z numeru 11/2015

Jerzy Cisło	Wrocław	46,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	41,40
Stanisław Bednarek	Łódź	39,91
Janusz Fiett	Warszawa	38,97
Marek Gałecki	USA	37,76
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Paweł Kubit	Kraków	36,17
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	34,72

Jerzy Cisło oto i za czterech Weteranów stanie! Dwanaście okrążeń – to nie jakieś byleco. Życzymy wielu dalszych rund! To nieprzerwane zainteresowanie naszą zabawą – ze strony matematyka tej klasy – cenimy ogromnie.

Zadania z matematyki nr 723, 724

Redaguje Marcin E. KUCZMA

723. Czy każdy ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych ma wyraz, będący jednocześnie pewnym wyrazem ciągu Fibonacciego (F_n)? $(F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n)$

724. Dowieść, że liczby zespolone a, b, c spełniają równanie

$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a| + |b| + |c|$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równanie

$$|a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| = |a+b+c|.$$

Zadanie 724 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2016

Przypominamy treść zadań:

715. Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie A, B. Wykazać, że zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych może być przedstawiony jako suma rozłącznych zbiorów trójelementowych, przy czym w każdym z tych zbiorów liczba środkowa (co do wielkości) różni się od jednej z dwóch pozostałych liczb o A, zaś od drugiej o B.

716. Dowieść, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a^2b + ab^2 - abc} + \sqrt{b^2c + bc^2 - abc} + \sqrt{c^2a + ca^2 - abc} > \frac{1}{2}\left(a+b+c\right)\sqrt{a+b+c}.$$

Czy współczynnik 1/2 (po prawej stronie) może być zastąpiony przez liczbę większą?

715. Można przyjąć, że $A < B$. Wskażemy indukcyjną konstrukcję ciągu zbiorów $X_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ $(x_n < y_n < z_n)$ o wymaganych własnościach. Zaczniemy od trójki $x_0 = 0$, $y_0 = A$, $z_0 = A + B$. Załóżmy, że zbiory $X_0, \ldots, X_{n-1}$ zostały już określone. Wówczas definiujemy x_n jako najmniejszą liczbę naturalną jeszcze niewykorzystaną (tzn. nieobecną w zbiorze $X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1}$) – to już gwarantuje, że w wyniku całej konstrukcji wszystkie liczby naturalne zostaną użyte oraz że ciąg (x_n) będzie rosnący.

Aby dokończyć określenie zbioru X_n (gdy $X_0, \ldots, X_{n-1}$ już mamy), patrzymy na liczbę $x_n + A$. Jeżeli jest ona jeszcze niewykorzystana, przyjmujemy ją jako y_n. Jeżeli jest wykorzystana, bierzemy jako y_n liczbę $x_n + B$; i z konieczności przyjmujemy $z_n = x_n + A + B$ (tak więc jedna z różnic $y_n - x_n$, $z_n - y_n$ będzie równa A, a druga B). Tak określona liczba z_n jest większa od liczb $z_0, \ldots, z_{n-1}$, więc nie została wcześniej wykorzystana.

Pozostaje uzasadnić, że w przypadku, gdy liczba $x_n + A$ została już wykorzystana, wówczas liczba $x_n + B$ pozostała niewykorzystana (i może być użyta jako y_n). Przypuśćmy, że liczba $x_n + B$ znalazła się w którymś zbiorze X_k o numerze $k < n$. Skoro $x_n > x_k$, to $x_n + B > x_k + B \geqslant y_k$; musiałaby zajść równość $x_n + B = z_k$. Ale $z_k = x_k + A + B$, więc mielibyśmy $x_n = x_k + A$. Liczba x_n, niewykorzystana aż do n-tego kroku konstrukcji, tym bardziej nie była jeszcze wykorzystana w momencie konstrukcji zbioru X_k, więc na mocy przyjętego algorytmu powinna była zostać użyta jako y_k.

Uzyskana sprzeczność dowodzi niesłuszności przypuszczenia, że $x_n + B \in X_0 \cup \ldots \cup X_{n-1}$, i uzasadnia poprawność określenia y_n; powstały zbiór $X_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ jest rozłączny ze zbiorami $X_0, \ldots, X_{n-1}$.

716. Przyjmijmy $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$; $s = x + y + z = (a + b + c)/2$. Oczywiście x, y, z to długości fragmentów boków od wierzchołków do punktów styczności z okręgiem wpisanym. Oznaczając przez I, r środek i promień okręgu wpisanego, mamy zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa $|AI|^2 = x^2 + r^2$, $|BI|^2 = y^2 + r^2$, $|CI|^2 = z^2 + r^2$.

Lewa strona zadanej nierówności jest sumą trzech składników. Przekształcamy wyrażenie pod pierwiastkiem w pierwszym składniku:

(1) $\quad ab(a + b - c) = (x + z)(y + z) \cdot 2z = 2xyz + 2sz^2.$

Pole trójkąta wyraża się wzorami $S = \sqrt{sxyz}$ (wzór Herona) oraz $S = sr$; stąd $xyz = sr^2$. Kontynuujemy przekształcenie (1):

$$2xyz + 2sz^2 = 2sr^2 + 2sz^2 = 2s \cdot |CI|^2.$$

Analogicznie wyrażają się pozostałe dwa składniki. Dowodzona nierówność przybiera postać

$$\sqrt{2s \cdot |CI|^2} + \sqrt{2s \cdot |AI|^2} + \sqrt{2s \cdot |BI|^2} > \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot \sqrt{2s}\,;$$

po uproszczeniu:

(2) $$|CI| + |AI| + |BI| > s$$

– co jest banalną prawdą, skoro $|CI| > z$, $|AI| > x$, $|BI| > y$.

Biorąc trójkąt, w którym najmniejszy kąt jest bliski zeru, uzyskujemy w nierówności (2) stosunek lewej do prawej strony dowolnie bliski jedności (trójkąt niewiele różni się od odcinka, a obie strony (2) są bliskie długości owego odcinka). Stąd wniosek, że stała 1/2 (w oryginalnej nierówności) jest optymalna.