Boki trójkąta

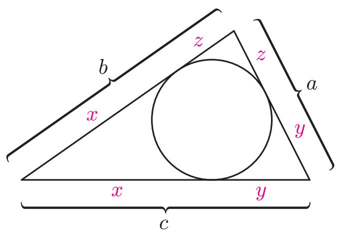
Joanna JASZUŃSKA

Jeśli w nierówności, którą chcemy uzasadnić, występują długości boków a, b, c pewnego trójkąta, często przydaje się *podstawienie Raviego*: $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, gdzie $x, y, z > 0$. Takie liczby x, y, z zawsze istnieją, są to bowiem długości odcinków stycznych do okręgu wpisanego w trójkąt (rysunek).

Nierówność średnich dla liczb $s, t > 0$:

$$\sqrt{\frac{s^2+t^2}{2}} \geqslant \frac{s+t}{2} \geqslant \sqrt{st} \geqslant \frac{2}{1/s+1/t}.$$

Średnie te to kolejno: *kwadratowa* (K), *arytmetyczna* (A), *geometryczna* (G) i *harmoniczna* (H).



Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że:

1. $\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c} + \dfrac{(a+b-c)(-a+b+c)}{a-b+c} + \dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)}{a+b-c} \geqslant a+b+c.$

2. $\dfrac{1}{-a+b+c} + \dfrac{1}{a-b+c} + \dfrac{1}{a+b-c} \geqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}.$

3. $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant \sqrt{-a+b+c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{a+b-c}.$

4. $abc \geqslant (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$

5. $2(ab+bc+ca) > a^2+b^2+c^2.$

6. $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2.$

7. Wykaż, że jeśli $x, y, z > 0$, to $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geqslant \dfrac{3}{2}.$

Autorem nierówności 4 jest Alessandro Padoa, natomiast nierówność 7 to nierówność Alfreda Nesbitta.

Rozwiązania

We wszystkich rozwiązaniach stosujemy podstawienie:

$$a = y+z, \qquad b = z+x, \qquad c = x+y.$$

Wówczas $-a+b+c = 2x$, $a-b+c = 2y$, $a+b-c = 2z$.

R1. Należy dowieść, że

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geqslant x+y+z.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geqslant G$ mamy

$$\frac{\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}}{2} \geqslant \sqrt{x^2}, \qquad \frac{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}}{2} \geqslant \sqrt{y^2}, \qquad \frac{\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}}{2} \geqslant \sqrt{z^2},$$

co po dodaniu stronami kończy dowód. □

R2. Należy wykazać, że

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geqslant \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geqslant H$ mamy

$$\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{4} \geqslant \frac{1}{y+z}, \qquad \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}{4} \geqslant \frac{1}{z+x}, \qquad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{4} \geqslant \frac{1}{x+y},$$

co po dodaniu stronami daje tezę. □

R3. Należy udowodnić, że

$$\sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} \geqslant \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z}.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $K \geqslant A$ mamy

$$\sqrt{y+z} \geqslant \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2},$$
$$\sqrt{z+x} \geqslant \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2},$$
$$\sqrt{x+y} \geqslant \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2},$$

co po dodaniu stronami kończy dowód. □

R4. Należy pokazać, że

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geqslant 8xyz.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geqslant G$ mamy

$$y+z \geqslant 2\sqrt{yz}, \qquad z+x \geqslant 2\sqrt{zx}, \qquad x+y \geqslant 2\sqrt{xy},$$

co po wymnożeniu stronami daje tezę. □

R5. Należy dowieść, że

$$2((y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)) >$$
$$> (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2.$$

Równoważnie,

$$4(xy+yz+zx) > 0,$$

co jest prawdą, bo $x, y, z > 0$. □

R6. Należy uzasadnić, że

$$\frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} < 2.$$

Zmniejszenie mianownika zwiększa wartość ułamka, więc

$$\frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} <$$
$$< \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{z+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} = 2. \ □$$

R7. Należy wykazać, że

$$\frac{-a+b+c}{a} + \frac{a-b+c}{b} + \frac{a+b-c}{c} \geqslant 3.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geqslant G$ mamy

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \qquad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2, \qquad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geqslant 2,$$

co po dodaniu stronami i odjęciu 3 daje tezę. □

Zadania 2 i 7 pochodzą odpowiednio z XLV i z VIII Olimpiady Matematycznej.