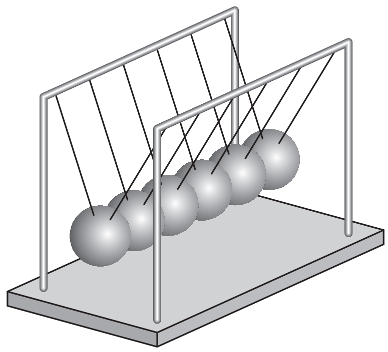
Wahadło Newtona

*Grzegorz DERFEL**

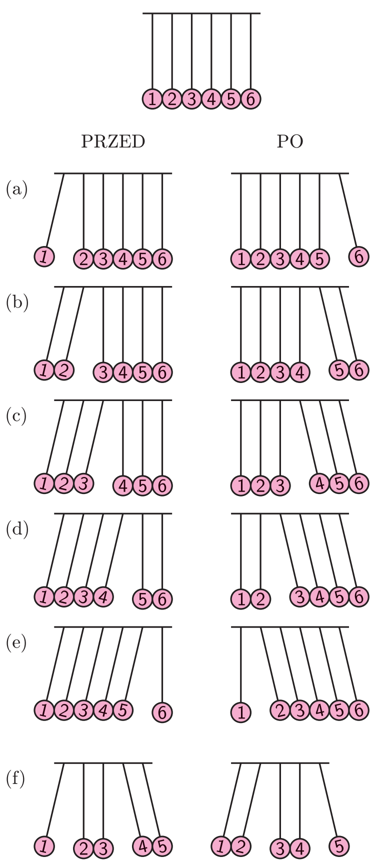


Rys. 1

Wahadło Newtona, zwane też kołyską Newtona, to zabawka, która pozwala zademonstrować osobliwe konsekwencje zasad zachowania pędu i energii przy zderzeniach. Choć przypisywana jest Newtonowi, należałoby nazywać ją „kołyską Mariotte'a”, który, na podstawie doświadczeń ze zderzającymi się kulami, opisał i wyjaśnił zjawiska warunkujące jej działanie. Składa się z kilku jednakowych wahadeł, utworzonych ze stalowych kul zawieszonych na niciach. Rysunek 1 wyjaśnia jej konstrukcję, lecz trzeba zwrócić uwagę na ważne cechy, które gwarantują interesujące nas działanie. W stanie równowagi środki kul położone są na jednej poziomej prostej. Wahadła mogą wahać się tylko w płaszczyźnie pionowej zawierającej tę prostą. Dla wprawienia kołyski w ruch, wahadła powinny być wychylane i zwalniane w sposób zapewniający centralne zderzenia kul zachodzące właśnie na tej prostej.

Przyjrzyjmy się działaniu kołyski złożonej z sześciu wahadeł. Prześledźmy pięć tradycyjnie demonstrowanych przypadków schematycznie pokazanych na rysunku 2, który przedstawia położenia kul przed i po obserwowanych zderzeniach.

(a) Jeśli wychylimy skrajną kulę (nr 1), a następnie puścimy ją swobodnie, uderzy ona w kulę 2 i zatrzyma się, kule 2–5 nie zmienią swojego położenia, a kula 6 odskoczy na tę samą wysokość, na którą przedtem odchylono kulę 1.
(b) Jeśli wychylimy razem kule 1 i 2, to gdy uderzą w kulę 3, zatrzymają się. Kule 3 i 4 nie zmienią swojego położenia, a kule 5 i 6 utworzą parę, która wychyli się tak samo jak para 1, 2.
(c) Wychylenie trzech kul 1, 2 i 3 spowoduje, że po zderzeniu z kulą 4 zatrzymają się one, a wychylą razem kule 4, 5 i 6.
(d) Jeśli wychylimy razem cztery kule 1–4, to po zderzeniu z kulą 5 czwórka ta rozpadnie się: kule 1 i 2 zatrzymają się, a kule 3 i 4 utworzą z kulami 5 i 6 nową czwórkę, która wychyli się na wysokość nadaną pierwotnej czwórce.
(e) Wreszcie rozważmy wychylenie kul 1–5. Po zderzeniu z kulą 6 piątka rozdzieli się. Kula 1 zatrzyma się, a wychyli się nowa grupa pięciu kul, 2–6.



Rys. 2

Dla wyjaśnienia tych efektów trzeba uświadomić sobie ważną konsekwencję zasad zachowania pędu i energii: dwie kule o jednakowych masach, zderzające się centralnie, wymieniają się prędkościami (oczywiście jeśli straty energii podczas ruchu i przy zderzeniu są zaniedbywalne). W szczególnym przypadku, gdy jedna z kul spoczywa, po zderzeniu przejmuje prędkość drugiej, która zatrzymuje się.

Wynik oddziaływań między kulami można analizować na podstawie zwrotów prędkości, jaką sąsiadujące kule mają na danym etapie zjawiska. Niech $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ oznacza kulę biegnącą w prawo, $\overleftarrow{\mathrm{A}}$ – w lewo, a A – kulę spoczywającą. $\overrightarrow{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ oznacza zderzenie biegnącej kuli A ze spoczywającą kulą B, czego wynik można zapisać jako $\mathrm{A}\overrightarrow{\mathrm{B}}$. Podobna wymiana prędkości następuje w zderzeniu $\mathrm{A}\overleftarrow{\mathrm{B}}$, które prowadzi do stanu $\overleftarrow{\mathrm{A}}\mathrm{B}$. Po zderzeniu $\overrightarrow{\mathrm{A}}\overleftarrow{\mathrm{B}}$ kule rozbiegają się: $\overleftarrow{\mathrm{A}}\overrightarrow{\mathrm{B}}$. Podobny wynik występuje, gdy dwie kule jednocześnie uderzają z obu stron w trzecią nieruchomą: $\overrightarrow{\mathrm{A}}\mathrm{B}\overleftarrow{\mathrm{C}} \Rightarrow \overleftarrow{\mathrm{A}}\mathrm{B}\overrightarrow{\mathrm{C}}$. Dwie kule nie oddziałują ze sobą, gdy biegną w tę samą stronę, np. $\overrightarrow{\mathrm{A}}\overrightarrow{\mathrm{B}}$.

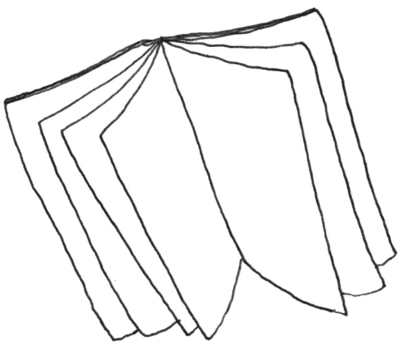
Rozważmy zjawiska zachodzące w przypadku (a), gdy wychylona została kula 1. Gdy dochodzi do jej zderzenia z kulą 2, zostaje zatrzymana, a kula 2 przejmuje jej prędkość. Kula 2 zderza się z 3, przy czym następuje kolejna wymiana prędkości między nimi. Ten proces powtarza się dalej z kulami 3 i 4, 4 i 5, oraz 5 i 6. Kule 1–5 pozostają w spoczynku, a kula 6 nie ma się z czym zderzyć i odskakuje. Stosując powyższy sposób zapisu, przebieg zderzeń można przedstawić następująco:

(a) $\overrightarrow{1}23456$, $1\overrightarrow{2}3456$, $12\overrightarrow{3}456$, $123\overrightarrow{4}56$, $1234\overrightarrow{5}6$, $12345\overrightarrow{6}$.

W analogiczny sposób można zinterpretować przypadek (b), w którym odchylamy kule 1 i 2. Podczas ruchu odchylone i puszczone swobodnie kule

*Instytut Informatyki, Politechnika Łódzka

nie oddziałują ze sobą i zmierzają ku kuli 3. Zderza się z nią kula 2 i wymieniając się z nią prędkością, zatrzymuje się. Kula 1 oddziałuje ze spoczywającą kulą 2, w wyniku czego zatrzymuje się ona, a kula 2 zyskuje jej prędkość. Kula 3 przekazuje prędkość kuli 4 i także się zatrzymuje. Następują wymiany prędkości kul 2 i 3 oraz 4 i 5. W ten sam sposób zachodzą kolejne wymiany prędkości kul 3 i 4 oraz 5 i 6. Kula 6 wychyla się. Kula 5 uzyskuje prędkość od kuli 4, która zostaje unieruchomiona. W rezultacie kula 5 podąża za kulą 6, tworząc z nią parę wychyloną tak samo silnie jak przedtem para 1 i 2, a kule 1–4 spoczywają.

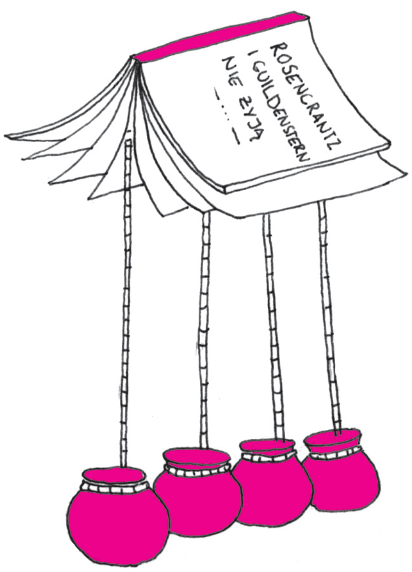


(b) $\overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,3\,4\,5\,6,\ \overrightarrow{1}\,2\,\overrightarrow{3}\,4\,5\,6,\ 1\,\overrightarrow{2}\,3\,\overrightarrow{4}\,5\,6,\ 1\,2\,\overrightarrow{3}\,4\,\overrightarrow{5}\,6,\ 1\,2\,3\,\overrightarrow{4}\,5\,\overrightarrow{6},\ 1\,2\,3\,4\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6}.$

Podobnie można wyjaśnić wychylenia kul w pozostałych przypadkach:

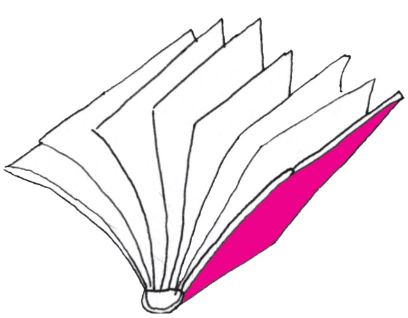
(c) $\overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,4\,5\,6,\ \overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,3\,\overrightarrow{4}\,5\,6,\ \overrightarrow{1}\,2\,\overrightarrow{3}\,4\,\overrightarrow{5}\,6,\ 1\,\overrightarrow{2}\,3\,\overrightarrow{4}\,5\,\overrightarrow{6},\ 1\,2\,\overrightarrow{3}\,4\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6},\ 1\,2\,3\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6};$
(d) $\overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,\overrightarrow{4}\,5\,6,\ \overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,4\,\overrightarrow{5}\,6,\ \overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,3\,\overrightarrow{4}\,5\,\overrightarrow{6},\ 1\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,4\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6},\ 1\,\overrightarrow{2}\,3\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6},\ 1\,2\,\overrightarrow{3}\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6};$
(e) $\overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,6,\ \overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,6,\ \overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,4\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6},\ \overrightarrow{1}\,\overrightarrow{2}\,3\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6},\ \overrightarrow{1}\,2\,\overrightarrow{3}\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6},\ 1\,\overrightarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,\overrightarrow{4}\,\overrightarrow{5}\,\overrightarrow{6}.$

Równie ciekawe zachowania, lecz inne od opisanych, obserwuje się, gdy skrajne kule lub grupy skrajnych kul są wstępnie odchylone jednocześnie na obu końcach. Zilustruje to przykład (f) wahadła o pięciu kulach. Niech kule 1 oraz 4 i 5 odchylone będą o takie same kąty, a kule 2 i 3 pozostają w położeniach równowagi. Po jednoczesnym uwolnieniu wahadeł kula 1 zderza się z 2 i zatrzymuje, a kula 2 przejmuje jej prędkość. Jednocześnie do nieruchomej kuli 3 dociera kula 4 i przekazuje jej swą prędkość, zatrzymując się. Kule 3 i 2 zderzają się z prędkościami równymi, lecz zwróconymi przeciwnie, po czym rozbiegają się w przeciwne strony. Kula 5 zderza się z 4 i oddaje jej swą prędkość. Kule 3 i 4 wymieniają się prędkościami i rozbiegają się. Kula 2 zderza się z 1 i zatrzymuje, a kula 1 odskakuje. Kula 4 zderza się z nieruchomą kulą 5, co oznacza, że zatrzymuje się, a kula 5 wychyla. Kula 3 zatrzymuje się, przekazawszy swoją prędkość kuli 2, która dołącza do kuli 1. W rezultacie odchylone są kule 1 i 2 oraz 5, a 3 i 4 wiszą nieruchomo. Powstaje układ kul symetryczny względem pierwotnego.



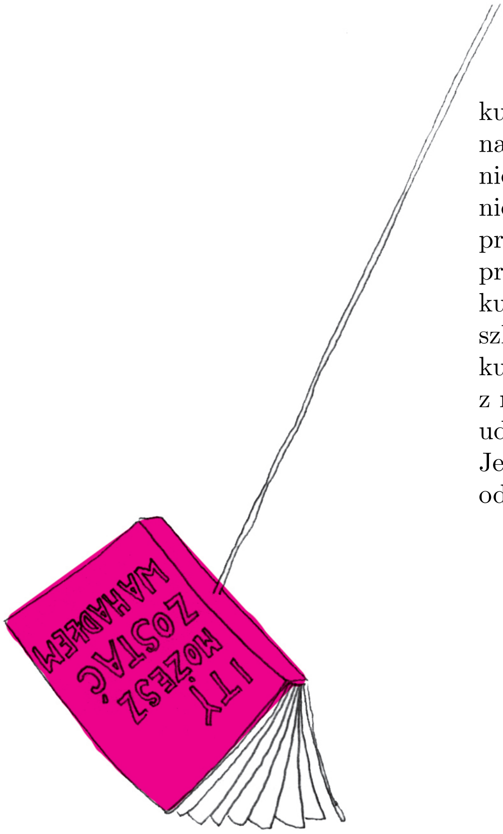
(f) $\overrightarrow{1}\,2\,3\,\overleftarrow{4}\,\overleftarrow{5},\ 1\,\overrightarrow{2}\,\overleftarrow{3}\,4\,\overleftarrow{5},\ 1\,\overleftarrow{2}\,\overrightarrow{3}\,\overleftarrow{4}\,5,\ \overleftarrow{1}\,2\,\overleftarrow{3}\,\overrightarrow{4}\,5,\ \overleftarrow{1}\,\overleftarrow{2}\,3\,4\,\overrightarrow{5}.$

Kluczowym procesem, który powtarza się tu wielokrotnie i decyduje o przebiegu zjawisk, jest wymiana prędkości możliwa dzięki zderzeniu centralnemu jednakowych mas. Gdyby np. wychylone jak w przypadku (b) kule 1 i 2 były trwale złączone i stanowiły jedną masę $2m$ o prędkości v, to zjawiska przebiegałyby inaczej. Po pierwszym zderzeniu połączone kule zachowałyby prędkość $v/3$, a kula 3 uzyskałaby $4v/3$. Prędkość ta byłaby kolejno przekazywana w procesach wymiany aż do kuli 6 i tylko ta kula wychyliłaby się. Połączone kule o prędkości $v/3$, po ponownym uderzeniu w kulę 3, zachowałyby prędkość $v/9$, a kuli 3 udzieliłyby $4v/9$. Po kolejnych wymianach prędkości między kulami 3, 4 i 5 z taką prędkością odchyliłaby się kula 5. W kolejnym zderzeniu prędkość połączonych kul spadłaby do $v/27$, a kula 3 przekazałaby $4v/27$ do kuli 4, która wychyliłaby się. Na koniec kula 3 otrzymałaby prędkość $4v/81$, a para kul zachowała $v/81$. W ten sposób energia i pęd połączonych kul 1 i 2 rozdzieliłyby się pomiędzy wszystkie kule. Widać więc, że nie wystąpiłaby charakterystyczna dla wahadła Newtona symetria wychyleń.

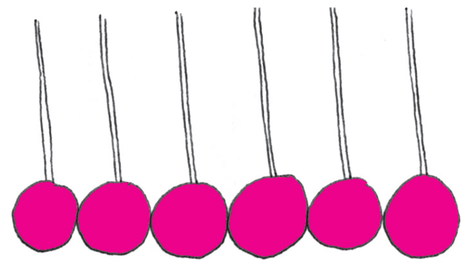


Z powyższych rozważań wynika, że działanie kołyski Newtona jest rezultatem serii wielu szybko po sobie następujących zderzeń. Za każdym razem kule stykają się, odkształcają sprężyście i odpychają. Seria zderzeń trwa ułamek milisekundy, więc nie jesteśmy w stanie ich rozróżnić. Zauważamy tylko końcowy efekt.

Liczne filmy i animacje pokazujące wahadło w akcji można znaleźć w internecie. Można też obejrzeć świetną scenkę pochodzącą z filmu „Rosencrantz i Guildenstern nie żyją". Niektóre ze sfilmowanych mniej udanych eksperymentów ujawniają, jak ważna jest precyzja wykonania i uruchamiania wahadła. Działanie wahadła jest bowiem poprawne wtedy, gdy jest ono dokładnie wykonane i starannie wprawione w ruch. Wtedy czas właściwego działania jest ograniczony tylko tarciem i stratami energii zachodzącymi, gdy podczas zderzeń



kule działają na siebie siłami odkształcającymi je w miejscach styku. Jeśli natomiast z powodu niedokładności konstrukcji zderzenia są niecentralne, to nie zachodzi pożądana wymiana prędkości. Np. kula uderzająca w nieruchomą nie zatrzymuje się, lecz zachowuje niewielką prędkość, a kuli uderzanej przekazuje prędkość nieco mniejszą od swojej prędkości pierwotnej. Obie kule rozbiegają się przy tym pod kątem prostym. W rezultacie następne zderzenia, w których te kule uczestniczą, są jeszcze bardziej niecentralne. Różnice mas kul także są szkodliwe, nawet jeśli zderzenia są centralne. Przy zderzeniu niejednakowych kul kula uderzająca nie zatrzymuje się, lecz, zależnie od różnicy mas, porusza się z niewielką prędkością w przód lub w tył, wskutek czego nie udziela kuli uderzonej swej prędkości początkowej, lecz odpowiednio większą lub mniejszą. Jeśli wspomniane niedoskonałości wahadła są zbyt wielkie, wywołują widoczne odstępstwa od idealnego przebiegu zderzeń, co niweczy cały efekt eksperymentu.



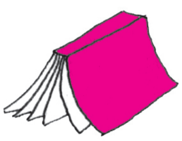
Zadania

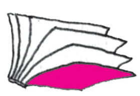
Redaguje Urszula PASTWA

M 1492. Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której istnieją takie liczby naturalne k i l, że spełnione jest równanie

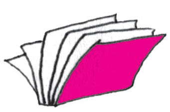
$$k^2 + 1 = l \cdot (2^m - 1).$$

Rozwiązanie na str. 19

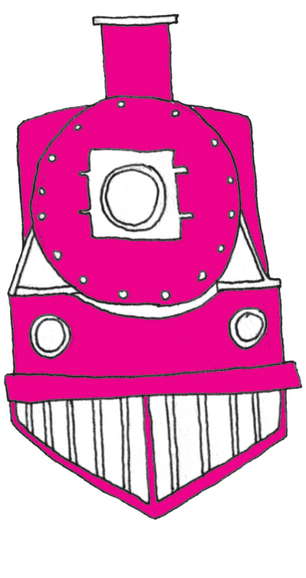




M 1493. W wierzchołkach dwunastościanu foremnego umieszczamy parami różne liczby naturalne, a następnie każdej krawędzi przypisujemy największy wspólny dzielnik liczb z jej końców. Czy możemy zrobić to w taki sposób, by suma liczb w wierzchołkach była równa sumie liczb na krawędziach?
Rozwiązanie na str. 5



M 1494. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O przecinają się w punkcie P. Niech O_1, O_2, O_3, O_4 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ABP, BCP, CDP i DAP. Wykazać, że proste OP, O_1O_3 i O_2O_4 przecinają się w jednym punkcie.
Rozwiązanie na str. 19



Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 903. Ile razy jaśniej Ziemia „w pełni" oświetla powierzchnię Księżyca podczas księżycowej nocy niż Księżyc w pełni oświetla powierzchnię Ziemi? Współczynnik odbicia światła od Ziemi wynosi $a_Z = 0{,}37$, a od Księżyca $a_K = 0{,}14$. Odległość Ziemia–Słońce $R_{ZS} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km, odległość Ziemia–Księżyc $R_{ZK} = 3{,}8 \cdot 10^5$ km, promień Ziemi $R_Z = 6{,}4 \cdot 10^3$ km, promień Księżyca $R_K = 1{,}74 \cdot 10^3$ km.
Rozwiązanie na str. 4

F 904. Zbliżając się do przejazdu drogowego przez tory, maszyniści jadących naprzeciw siebie pociągów jednocześnie włączają ostrzegawcze sygnały dźwiękowe, każdy o częstości $f_0 = 440$ Hz. Wartości prędkości pociągów w chwili włączenia sygnałów są równe $v = 50$ km/h. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi $c = 340$ m/s. Przyjmij, że każdy z sygnałów rozprzestrzenia się jako fala harmoniczna. Jakiej częstości dźwięk usłyszy każdy z maszynistów przed spotkaniem pociągów?
Rozwiązanie na str. 6