W jednym punkcie

Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach należy uzasadnić, że pewne trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Często można wykazać, że wszystkie one są symetralnymi, dwusiecznymi, wysokościami albo środkowymi pewnego trójkąta, co oczywiście kończy dowód.

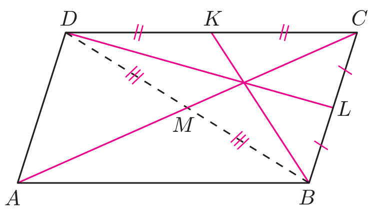
1. Punkty K i L są środkami odpowiednio boków CD i BC równoległoboku $ABCD$. Udowodnij, że odcinki BK i DL przecinają się na przekątnej AC.

2. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg i $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykaż, że główne przekątne tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

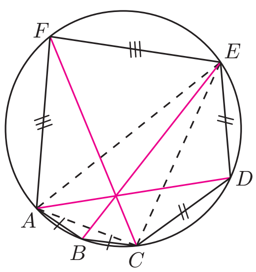
3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że $AS = BS$.

4. Wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta $ABCDE$ są równe. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie S. Wykaż, że proste ES i BC są prostopadłe.

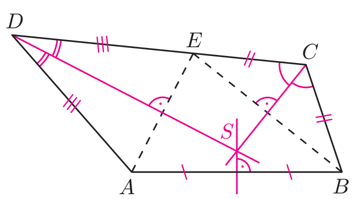
5. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ACDE$ i $BCFG$. Udowodnij, że proste AG, BE oraz wysokość CS trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie.



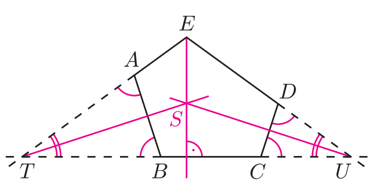
Rys. 1



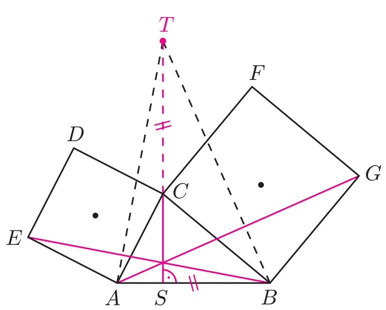
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Rozwiązania

R1. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych danego równoległoboku (rys. 1). Wówczas M jest środkiem odcinka BD i odcinki BK, DL, CM przecinają się w jednym punkcie jako środkowe trójkąta BCD. □

R2. Z warunku $AB = BC$ wynika, że punkt B jest środkiem łuku AC danego okręgu i kąty wpisane AEB i CEB są równe (rys. 2). Prosta BE jest więc dwusieczną kąta AEC w trójkącie ACE; analogicznie proste AD i CF są dwusiecznymi pozostałych kątów tego trójkąta. □

R3. Niech E będzie takim punktem boku CD, że $ED = AD$, wtedy $EC = BC$ (rys. 3). Wówczas punkty A i E są symetryczne względem dwusiecznej kąta CDA, zatem prosta DS jest symetralną odcinka AE. Analogicznie prosta CS jest symetralną odcinka BE. Symetralne boków trójkąta ABE przecinają się w punkcie S, a stąd $AS = BS$. □

R4. Niech T i U będą punktami przecięcia prostej BC odpowiednio z prostymi EA i ED (rys. 4). Wobec równości kątów, trójkąty ATB i CUD są równoramienne i podobne, a stąd $\sphericalangle ETU = \sphericalangle EUT$. Symetralna boku AB jest jednocześnie dwusieczną kąta przy wierzchołku T w trójkącie ATB, a więc także w trójkącie ETU. Podobnie symetralna odcinka CD jest dwusieczną kąta EUT, zatem S jest punktem przecięcia dwusiecznych trójkąta równoramiennego ETU. Dwusieczna ES jest więc prostopadła do podstawy TU. □

R5. Obróćmy kwadrat $ACDE$ o $90°$ wokół środka tak, by punkt A przeszedł na punkt C, natomiast kwadrat $BCFG$ o $90°$ wokół swojego środka tak, by punkt B przeszedł na punkt C (rys. 5). Przy obydwu tych obrotach odcinek AB przechodzi na ten sam odcinek o końcu w punkcie C, prostopadły do AB i równy AB. Nazwijmy drugi jego koniec T, wówczas punkty T, C, S są współliniowe.

Przy pierwszym obrocie odcinek BE przechodzi na TA, stąd $BE \perp TA$. Przy drugim obrocie odcinek AG przechodzi na TB, zatem $AG \perp TB$. Wobec tego proste AG, BE, CS są wysokościami trójkąta ABT. □

Zadania domowe

6. Wykaż, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_6, A_2A_9 i A_3A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

7. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa $120°$. Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

8. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

9. Wykaż, że proste opisane w zadaniu **2** są też wysokościami trójkąta BDF.

Dwa rozwiązania zadania 6 przedstawiono w *deltoidzie* 11/2009. Zadania 3, 7 i 8 pochodzą odpowiednio z VIII, II i V Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów `www.omg.edu.pl`